Bemerkungen zu Fundamentalsystemen

Im Gegensatz zu linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann im allgemeinen Fall

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

nicht immer ein Fundamentalsystem (d.h. n linear unabhängige Lösungen) mittels elementarer Funktionen angegeben werden.

Einige Möglichkeiten, hier Lösungen zu gewinnen, seien kurz erwähnt.

1. Transformation der unabhängigen Variablen

Dies geschieht, falls möglich, durch die Setzung $\xi = \varphi(x)$ und damit $y(x) = y(\varphi^{-1}(\xi) = u(\xi)$.

Dann ist nach der Kettenregel

$$y'(x) = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = u'(\xi)\varphi'(x) \quad \text{und weiters}$$

$$y''(x) = (\frac{du'}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}) \cdot \varphi'(x) + u'(\xi)\varphi''(x) = u''(\xi)(\varphi'(x))^2 + u'(\xi)\varphi''(x)$$

etc.

Man erhält damit eine lineare Differentialgleichung für $u(\xi)$, die eventuell leichter zu lösen ist.

Betrachten wir nun im speziellen eine (homogene) **Eulersche Differentialgleichung** . Diese besitzt die Form

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0 \quad \text{, wobei}$$

$a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sind.

Wir wählen auf $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$ bzw. auf $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\}$ die Transformation

$$\xi = \varphi(x) = \ln|x| \ , \ \text{i.e } \ x = e^{\xi} \ \text{ oder } \ x = -e^{\xi} \ .$$

Wegen $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$ ist dann $y'(x) = \frac{1}{x}u'(\xi)$ und weiters

$y''(x) = u''(\xi)\frac{1}{x^2} + u'(\xi)\frac{-1}{x^2} = \frac{u''(\xi)-u'(\xi)}{x^2}$ und analog

$y'''(x) = \frac{1}{x^3}(u'''(\xi) - 3u''(\xi) + 2u'(\xi))$ etc.

Auf diese Weise erhalten wir eine lineare Differentialgleichung für $u(\xi)$ mit **konstanten** Koeffizienten.

Beispiel. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

Gemäß vorher erhalten wir $(u''(\xi) - u'(\xi)) - 3u'(\xi) + 4u = 0$ bzw.

$u''(\xi) - 4u'(\xi) + 4u = 0$. Diese Differentialgleichung besitzt als Lösung

$u(\xi) = C_1e^{2\xi} + C_2\xi e^{2\xi}$.

Rücksubstitution liefert schließlich $y(x) = C_1x^2 + C_2 \ln|x|x^2$.

Bemerkung. Wegen $e^{\lambda\xi} = e^{\lambda \ln x} = x^\lambda$ hätte man hier auch mit dem Ansatz $y(x) = x^\lambda$ starten können.

2. Transformation der abhängigen Variablen

Dies geschieht durch die Setzung $y(x) = \psi(x, v(x))$.

Dann ist $y'(x) = \psi_x + \psi_v v'$ und

$y''(x) = (\psi_{xx} + \psi_{xv}v') + (\psi_{vx} + \psi_{vv}v')v' + \psi_v v'' =$

$= \psi_{xx} + 2\psi_{xv}v' + \psi_{vv}(v')^2 + \psi_v v''$ etc.

Man erhält damit eine lineare Differentialgleichung, welche bei geeigneter Wahl leichter zu lösen ist als die ursprüngliche Gleichung.

Derartige Transformationen wurde etwa bei der Bernoulli Differentialgleichung und bei gleichgradig homogenen Differentialgleichungen verwendet.

Besondere Bedeutung verdient der Spezialfall $y = \psi(x, v(x)) = u(x)v(x)$ mit einer noch zu wählenden Funktion $u(x)$.

Daraus ergibt sich das Verfahren der **Reduktion der Ordnung** (nach d'Alembert).

Ist nämlich $u(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$, dann gilt für die gemäß $y(x) = u(x)v(x)$ transformierte Differentialgleichung $\widetilde{L}[v] = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x)v^{(k)}(x)$, dass $b_0 = 0$ ist.

Setzen wir $w(x) = v'(x)$, dann erhalten wir eine Differentialgleichung für $w(x)$ von der Ordnung $n-1$.

Kennt man also k linear unabhängige Lösungen von $L[y] = 0$, dann kann auf diese Art die Ordnung um k reduziert werden.

Beispiel. $y'' + xy' - y = x^3$

Wir beobachten, dass $u(x) = x$ eine Lösung der zugehörigen **homogenen** Differentialgleichung ist, und treffen daher den Ansatz

$$y(x) = xv(x) \;\Rightarrow\; y'(x) = v + xv' \;,\; y''(x) = 2v' + xv''$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$xv'' + 2v' + x^2v' + xv - xv = xv'' + (2 + x^2)v' = x^3 \quad \text{bzw.}$$

$$v'' + (x + \tfrac{2}{x})v' = x^2 \;.$$

Mittels $w(x) = v'(x)$ erhalten wir die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$w' + (x + \tfrac{2}{x})w = x^2 \quad ,$$

welche auf die bekannte Art zu lösen ist.