Folgen und Reihen von Funktionen

Bislang hatten wir es vorwiegend mit Zahlenfolgen (a_n) bzw. mit Zahlenreihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ zu tun.

Eine Folge von Funktionen begegnete uns etwa bei der Exponentialfunktion. Dort betrachteten wir die Folge von Funktionen $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ und hielten fest, dass für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ die (nun entstandene) Zahlenfolge $(f_n(x))$ gegen e^x konvergiert.

Im Zuge der Diskussion von Taylor-Reihen wurde gezeigt, dass für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ die (nun entstandene) Zahlenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ die Summe e^x hat.

Ganz allgemein lassen sich Folgen und Reihen von Funktionen dazu verwenden, um aus "elementaren" Funktionen sogenannte höhere Funktionen zu erzeugen. Dabei taucht die Frage auf, welche Eigenschaften (wie etwa Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) der "einfacheren" Funktionen sich auf die Grenzfunktion übertragen.

Als weitere Quelle zur Erzeugung höherer Funktionen fungieren Differentialgleichungen, wo sehr oft Lösungsansätze mittels Reihen verwendet werden.

Eine Besonderheit von Funktionenfolgen bzw. -reihen ist, dass hier **mehrere Konvergenzbegriffe** (für uns im wesentlichen "punktweise Konvergenz" und "gleichmäßige Konvergenz") sinnvoll zur Anwendung kommen.

Sei nun eine Folge $(f_n(x))$ von Funktionen auf einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ (bzw. $X \subseteq \mathbb{C}$) definiert. Für ein festes $x \in X$ liegt dann eine **Zahlenfolge** vor, welche auf Konvergenz untersucht werden kann.

Definition.

(i) (f_n) heißt **punktweise konvergent** an $x \in X$, falls die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert.

$X_K = \{x \in X \ : \ (f_n(x)) \text{ konvergiert}\}$ heißt die **Konvergenzmenge** von

(f_n) .

(ii) Die Funktion f mit $D(f) = X_K$ und $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ heißt **Grenzfunktion** von (f_n) .

Beispiele.

1) Sei $X = [0,1]$ und $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = \frac{1}{x}$, falls $0 < x \le 1$ sowie $f(x) = 0$, falls $x = 0$.

Die Grenzfunktion einer Folge von beschränkten Funktionen kann also unbeschränkt sein.

2) Sei $X = [0,\infty)$ und $f_n(x) = x^n$. Dann ist $X_K = [0,1]$ und $f(x) = 0$, falls $0 \le x < 1$ sowie $f(x) = 1$, falls $x = 1$.

Die Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen kann also unstetig sein.

3) Sei $X = [0,\infty)$ und $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in X_K$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx = 1$, aber $\int\limits_0^\infty f(x)dx = 0$.

Integration und Grenzwertbildung können also im allgemeinen **nicht** vertauscht werden.

4) Sei $X = \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in X_K$.

Da die Folge der Ableitungen $(f_n'(x)) = (\sqrt{n}\cos nx)$ für kein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, sind also Differentiation und Grenzwertbildung im allgemeinen ebenfalls **nicht** vertauschbar.

Die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge (f_n) gegen f bedeutet, dass es zu jedem $x \in X_K$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon(x)$ gibt, sodass für alle $n > N_\varepsilon(x)$ gilt, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Die nun sich stellende Frage ist: Kann bzw. wann kann N_ε unabhängig von x gewählt werden ? Wie zu erwarten wird dies von der betrachteten Punktmenge X abhängen (siehe auch "gleichmäßige Stetigkeit").

Beispiele.

1) Sei $X = (0,1)$ und $f_n(x) = x^n$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in X_K$.

Ist ein beliebiges $0 < \varepsilon < 1$ gegeben, dann ergibt sich für das zugehörige $N_\varepsilon(x)$:

$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon \;\Rightarrow\; n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$. Also ist $N_\varepsilon(x) = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right] + 1$. Dies wird aber unbeschränkt für $x \to 1$.

Also kann es kein "universelles" N_ε auf $(0,1)$ geben.

2) Sei $X = (0, \frac{1}{2})$ und $f_n(x) = x^n$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in X_K$.

Zu einem beliebigem $0 < \varepsilon < 1$ wählen wir $N_\varepsilon = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{2}}\right] + 1$.

Dann gilt für alle $n > N_\varepsilon$ und **für alle** $x \in X$, dass

$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$. N_ε hängt hier also **nicht** von x ab.

Definition. Eine Funktionenfolge (f_n) heißt **gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion** f **auf** X, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine (von x unabhängige) natürliche Zahl N_ε existiert, sodass für alle $n > N_\varepsilon$ und alle $x \in X$ gilt : $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Schreibweise: $f_n(x) \underset{X}{\to} f(x)$ oder auch $f_n(x) \underset{glm}{\to} f(x)$.

Bemerkungen.

(i) Punktweise Konvergenz ist eine "lokale Eigenschaft" der Folge (f_n) , gleichmäßige Konvergenz hingegen eine "globale Eigenschaft" von (f_n) auf X .

(ii) Gleichmäßige Konvergenz bedeutet anschaulich, dass die Graphen von $f_n(x)$ für alle $n > N_\varepsilon$ in einem 2ε-Streifen um den Graphen von $f(x)$

liegen.

Beispiel. Sei $X = [1, \infty)$ und $f_n(x) = e^{-nx}$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in X_K$.

Die Überlegung $|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx} \leq e^{-n} < \varepsilon$ für $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$ und $0 < \varepsilon < 1$ zeigt, dass die vorgelegte Funktionenfolge gleichmäßig auf X konvergiert.