Vertauschung von Grenzprozessen bei Funktionenfolgen

Zuerst erwähnen wir einige Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge (f_n) auf X .

Satz. (**Cauchy-Kriterium**) Folgende Aussagen sind äquivalent :

1) $f_n(x) \underset{X}{\rightarrow} f(x)$

2) $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N_\varepsilon\ \ \forall\ n, m > N_\varepsilon$ und $\forall\ x \in X\ :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2) : Sei $\varepsilon > 0$. Laut Voraussetzung existiert ein N_ε mit $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in X$ und $n > N_\varepsilon$.

Für $n, m > N_\varepsilon$ gilt dann

$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) - (f_m(x) - f(x))| \leq$

$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2) $\Rightarrow$ 1) : Für jedes $x \in X$ ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent. Sei f die Grenzfunktion, i.e. $f_n(x) \rightarrow f(x)\quad \forall\ x \in X$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N_ε mit $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m > N_\varepsilon$ und $x \in X$.

Werde nun $n > N_\varepsilon$ festgehalten, und sei $x \in X$. Für ein geeignetes $m > N_\varepsilon$ gilt dann $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ und damit

$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f_m(x) + (f_m(x) - f(x))| \leq$

$\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Dies bedeutet aber $f_n(x) \underset{X}{\rightarrow} f(x)$. $\square$

Satz. (**Supremumskriterium**) Folgende Aussagen sind äquivalent :

1) $f_n(x) \underset{X}{\rightarrow} f(x)$

2) $s_n = \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| \to 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2) : Sei $\varepsilon > 0$. Laut Voraussetzung existiert ein N_ε mit $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in X$ und $n > N_\varepsilon$.

Dann ist aber $s_n = \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, i.e. $s_n \to 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

2) $\Rightarrow$ 1) : Sei $s_n \to 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon$ mit $0 \leq s_n < \varepsilon$ für alle $n > N_\varepsilon$.

Dann gilt aber für alle $x \in X$, dass

$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| = s_n < \varepsilon$, i.e. $f_n(x) \underset{X}{\to} f(x)$. $\square$

Beispiel.

Sei X eine **kompakte** Teilmenge von $(-1,1)$ und sei $f_n(x) = x^n$. Dann gibt es ein $0 < \delta < 1$ mit $X \subseteq (-1+\delta, 1-\delta) \subseteq (-1,1)$.

Dann ist $s_n = \sup\limits_X |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_X |x^n| \leq (1-\delta)^n \to 0$.

D.h., auf jeder kompakten Teilmenge von $(-1,1)$ konvergiert die Folge (x^n) gleichmäßig gegen 0 .

Wie schon erwähnt ist die Frage, ob bzw. unter welchen Umständen sich bestimmte Eigenschaften der Funktionen f_n sich auf die Grenzfunktion übertragen, von großer Bedeutung.

Satz. Es gelte $f_n(x) \underset{X}{\to} f(x)$.

1) Sind alle f_n beschränkt auf X , dann auch f .

2) Sind alle f_n stetig auf X , dann auch f .

Beweis. Ad 1) $\exists\, N$ sodass $|f(x) - f_n(x)| \leq 1$ für alle $x \in X$ und $n \geq N$. Die Funktion f_N ist beschränkt auf X , also existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f_N(x)| \leq M \quad \forall\, x \in X$.

Dann ist aber $|f(x)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \le 1 + M \quad \forall\, x \in X$.

Ad 2) Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$. Laut Voraussetzung $\exists\, N$ sodass $|f(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in X$ und $n \ge N$.

Die Funktion f_N ist stetig in x_0 , also $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ sodass $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ falls $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$.

Für $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ gilt dann

$$|f(x) - f(x_0)| = |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \le$$

$$\le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| <$$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, i.e. f ist stetig in x_0 . $\square$

Folgerung. Sind alle f_n stetig auf X , aber die Grenzfunktion f unstetig auf X , dann konvergiert (f_n) **nicht** gleichmäßig gegen f (sondern nur punktweise).

Ein wichtiges hinreichendes Kriterium, wann aus der punktweisen Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz folgt, ist durch folgende Aussage gegeben.

Satz. (**Dini**)
Sei X kompakt und (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen auf X , welche punktweise gegen die stetige Funktion f konvergiert.

Ist für jedes $x \in X$ die Zahlenfolge $(f_n(x))$ monoton wachsend (bzw. für jedes $x \in X$ monoton fallend), dann gilt $f_n(x) \underset{X}{\to} f(x)$.

Die nächste Fragestellung bezieht sich auf die Integration von Funktionenfolgen.

Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei f_n R-integrierbar auf dem Intervall $[a,b]$. Des weiteren gelte $f_n(x) \underset{[a,b]}{\to} f(x)$.

Dann ist f R-integrierbar auf $[a,b]$ und

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \ .$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\forall\, n \geq N$ und $\forall\, x \in [a,b]$ gilt $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Weiters gilt für jede Partition P des Intervalls $[a,b]$:

$$\left|\overline{S}_P(f - f_n)\right| = \left|\sum \sup_{I_k}(f(x) - f_n(x))\Delta x_k\right| \leq \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \tfrac{\varepsilon}{3}$$

$$\left|\underline{S}_P(f - f_n)\right| = \left|\sum \inf_{I_k}(f(x) - f_n(x))\Delta x_k\right| \leq \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Weil f_N R-integrierbar auf $[a,b]$ ist, existiert eine Partition P von $[a,b]$ sodass $0 < \overline{S}_P(f_N) - \underline{S}_P(f_N) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Für diese Partition gilt dann weiters

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f - f_N) + \overline{S}_P(f_N) - \underline{S}_P(f_N) - \underline{S}_P(f - f_N) \leq$$

$$\leq |\overline{S}_P(f - f_N)| + |\overline{S}_P(f_N) - \underline{S}_P(f_N)| + |\underline{S}_P(f - f_N)| \leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ .$$

Damit ist f R-integrierbar auf $[a,b]$ (Riemannsches Kriterium) und für alle $n \geq N$ gilt

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \tfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \ .$$

D.h. die Integration ist mit der Grenzwertbildung vertauschbar. $\square$

Zum Abschluß beschäftigen wir uns mit der Frage der Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung. Dass die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge kein hinreichendes Kriterium sein kann, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$.

Nach dem Supremumskriterium konvergiert (f_n) auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die (differenzierbare) Grenzfunktion $f(x) = 0$. Hingegen konvergiert die Folge der Ableitungsfunktionen $(f_n'(x)) = (n\cos(n^2 x))$ für kein $x \in \mathbb{R}$.

Satz. (ohne Beweis)

Die Funktionen $f_n(x)$ seien auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Für (wenigstens) ein $x_0 \in [a, b]$ sei $(f_n(x_0))$ konvergent. Weiters sei die Folge der Ableitungen (f'_n) gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$.

Dann gilt
(i) (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ (gegen eine Funktion f) ,

(ii) f ist auf $[a, b]$ differenzierbar,

(iii) $\frac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.