Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen

Die Konvergenz einer Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ wurde bekanntlich auf die Konvergenz der zugehörigen Folge (s_n) der Partialsummen zurückgeführt, wobei $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Gilt $s_n \to s$, dann heißt s die Summe der Reihe und $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Dieses Prinzip kommt auch bei der Betrachtung von Funktionenreihen zum Tragen. Ist $X \subseteq \mathbb{R}$ (bzw. $X \subseteq \mathbb{C}$) und sind Funktionen $a_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ auf X definiert, dann betrachten wir zu einer Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ die zugehörige Funktionenfolge der Partialsummen $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$.

Dementsprechend heißt dann eine Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **punktweise konvergent an** $x \in X$, wenn die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ konvergiert, i.e. wenn $(A_n(x))$ konvergiert.

Die Menge $X_K = \{x \in X \ : \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \text{ ist konvergent}\}$ heißt wiederum die **Konvergenzmenge** von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und die Funktion A mit $D(A) = X_K$ und $A(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ heißt die **Summenfunktion** der Funktionenreihe.

Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt auf der Menge X **gleichmäßig konvergent** zur Summenfunktion A , wenn $A_n(x) \underset{X}{\to} A(x)$.

Man verwendet auch die Schreibweise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \underset{X}{=} A(x)$.

Die Anwendung des Cauchy-Kriteriums für Funktionenfolgen liefert unmittelbar

Satz. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \underset{X}{=} A(x) \quad \Leftrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N_\varepsilon\ \ \forall\ n \geq m > N_\varepsilon \ \text{ und } \ \forall\ x \in X\ :\ |\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)| < \varepsilon$$

Ein wichtiges und häufig verwendetes Kriterium wird durch folgende Aussage geliefert.

Satz. (**Weierstrass**)

Besitzen die auf X definierten Funktionen $a_k(x)$ dort die Abschätzung $|a_k(x)| \leq c_k$ und konvergiert die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, so konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ gleichmäßig auf X .

Beweis. (Verwendung des Cauchy-Kriteriums) Laut Voraussetzung gilt $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N_\varepsilon\ \ \forall\ n \geq m > N_\varepsilon\ :\ \sum\limits_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon$.

Dann gilt für alle $x \in X$

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon\ . \quad \square$$

Die folgenden Aussagen folgen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen über Funktionenfolgen.

- Die Summenfunktion einer auf X gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen ist dort ebenfalls stetig.

- Seien $a_k(x)$ R-integrierbar auf $[a,b]$ und gelte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \underset{[a,b]}{=} A(x)$.

Dann ist $A(x)$ R-integrierbar auf $[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b a_k(x)dx$$, d.h. es darf "gliedweise

integriert" werden.

- Seien $a_k(x)$ auf $[a,b]$ differenzierbar. An einer Stelle $x_0 \in [a,b]$ sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x_0)$ konvergent. Ferner konvergiere $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k(x)$ auf $[a,b]$ gleichmäßig. Dann gilt

  - $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$,

  - die Summenfunktion $A(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ ist differenzierbar,

  - $A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k(x)$, d.h. es darf "gliedweise differenziert" werden.

Beispiel.

Die (geometrische) Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ konvergiert nach dem Weierstrass-Kriterium auf $[-q,q]$, $q < 1$ gleichmäßig ($|(-1)^k x^{2k}| \leq q^{2k}$) und hat dort die Summenfunktion $\frac{1}{1+x^2}$.

Mit $\arctan t = \int\limits_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_0^t \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}\right) dx =$

$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int\limits_0^t x^{2k} dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$ erhalten wir die Taylor-Entwicklung von $\arctan t$.

Beispiel.

Betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x$.

Dann ist jeder Summand differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (Quotientenkriterium).

Dass die Reihe der Ableitungen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ auf jedem kompakten Teilintervall von $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, folgt später aus einer Aussage über Potenzreihen.

Damit ist die vorherige Aussage anwendbar und es gilt bekannterweise

$(\sin x)' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$.