Potenzreihen

Potenzreihen sind Funktionenreihen mit einer besonderen Gestalt.

Definition. Ist (a_k) eine Folge reeller (bzw. komplexer) Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$ (bzw. $z_0 \in \mathbb{C}$), dann heißt die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ (bzw. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$) eine **Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt** x_0 (bzw. z_0) .

(Im folgenden verwenden wir die reelle Notation. Die Ergebnisse gelten aber auch sinngemäß im Komplexen. Statt Konvergenzintervalle treten dort dann Konvergenzkreisscheiben auf.)

Potenzreihen haben sehr übersichtliche Konvergenzmengen.

Satz. Für eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ gilt

1) Konvergiert die Potenzreihe an einer Stelle $x_1 \neq x_0$, dann konvergiert sie auch absolut für alle x mit $|x-x_0| < |x_1-x_0|$.

2) Divergiert die Potenzreihe an einer Stelle $x_2 \neq x_0$, dann divergiert sie auch für alle x mit $|x-x_0| > |x_2-x_0|$.

Beweis. zu 1) Konvergiere die Potenzreihe an $x_1 \neq x_0$ und sei $|x-x_0| < |x_1-x_0|$. Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x_1-x_0)^k$ folgt notwendigerweise, dass $\lim\limits_{k\to\infty} a_k(x_1-x_0)^k = 0$. Damit gibt es ein $M > 0$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|a_k(x_1-x_0)^k| \leq M$.

Daraus erhalten wir nun

$$\left|a_k(x-x_0)^k\right| = \left|a_k(x_1-x_0)^k\right| \left|\tfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^k \leq M \left|\tfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^k .$$

Weil $\left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right| = q < 1$ ist, folgt mit dem Vergleichskriterium die Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.

zu 2) Divergiere die Potenzreihe an $x_2 \neq x_0$ und gelte weiters dass $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$. Dann kann wegen 1) die Potenzreihe **nicht** an x konvergieren (weil sie sonst auch an x_2 konvergieren müsste). $\square$

Beispiel. Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$ (hier ist $x_0 = 0$).

Aus dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die Reihe an $x_1 = 1$ konvergiert. Folglich konvergiert die Reihe für $|x| < 1$ absolut. An der Stelle $x_2 = -1$ divergiert die Reihe (harmonische Reihe). Also ist der Konvergenzbereich durch $-1 < x \leq 1$ gegeben.

Setzen wir nun

$$R = \sup \left\{ r : r = |x - x_0| \ , \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ ist konvergent} \right\} ,$$

dann erhalten wir die wichtige

Folgerung. Für jede Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ existiert eindeutig ein "**Konvergenzradius**" R , $0 \leq R \leq \infty$, für den gilt :

- Ist $R = 0$, dann konvergiert die Potenzreihe nur an x_0 .

- Ist $0 < R < \infty$, dann konvergiert die Potenzreihe absolut im Konvergenzintervall $U_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_0| < R\}$ (bzw. im komplexen Fall in der Konvergenzkreisscheibe $U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < R\}$).

Sie divergiert auf $\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_0| > R\}$ (bzw. $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| > R\}$) .

- Ist $R = \infty$, dann konvergiert die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{R}$ (bzw. auf ganz $\mathbb{C}$) .

Da eine Potenzreihe durch die Koeffizienten a_k bestimmt ist, muß auch ihr Konvergenzradius durch sie bestimmt sein.

Satz. (**Cauchy-Hadamard**)

Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ gilt

1) $\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \infty \;\Rightarrow\; R = 0$

2) $0 < \limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} < \infty \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}$

3) $\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 0 \;\Rightarrow\; R = \infty$

bzw. symbolisch $R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}$.

Beweis.

zu 1) Sei $\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \infty$ und $x \neq x_0$ beliebig. Dann existiert eine Teilfolge a_{k_j} mit $\left|a_{k_j}\right|^{\frac{1}{k_j}} \geq \frac{1}{|x-x_0|}$ für fast alle k_j , woraus folgt dass $|a_{k_j}(x-x_0)^{k_j}| \geq 1$. Damit ist aber das notwendige Kriterium für die Konvergenz einer Reihe verletzt, also konvergiert die Potenzreihe **nicht** an x und somit ist $R = 0$.

zu 2) Sei $0 < \limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} < \infty$ und $x \in \mathbb{R}$ fest. Wir untersuchen mittels des Wurzelkriteriums und erhalten

$$\limsup_{k\to\infty} \left|a_k(x-x_0)^k\right|^{\frac{1}{k}} = |x-x_0| \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = |x-x_0| \frac{1}{R^*} .$$

Der letzte Ausdruck ist kleiner als 1 (absolute Konvergenz) , im Falle dass $|x-x_0| < R^*$ und größer als 1 (Divergenz) , wenn $|x-x_0| > R^*$.

Dies bedeutet aber $R = R^* = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}$.

zu 3) Sei $\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 0$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aus $\limsup\limits_{k\to\infty} \left|a_k(x-x_0)^k\right|^{\frac{1}{k}} = |x-x_0| \limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 0 < 1$ folgt die absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$, i.e. $R = \infty$. $\square$

Beispiele.

(i) Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k (x-2)^k$.

Wegen $\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} k = \infty$ ist $R = 0$.

(ii) Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k}(x+1)^k$.

Wegen $\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 3 \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 3$ ist $R = \frac{1}{3}$. Die Potenzreihe konvergiert also (absolut) für alle x mit $|x+1| < \frac{1}{3}$, i.e. für alle x mit $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$.

(ii) Betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Wegen $\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} = 0$ (weil mittels vollständiger Induktion gilt, dass $k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k$) ist $R = \infty$.

Wie zuvor erwähnt, konvergieren Potenzreihen in symmetrischen Intervallen (bzw. Kreisscheiben) um einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ (bzw. $z_0 \in \mathbb{C}$) . Im Hinblick auf gliedweise Integration bzw. Differentiation von Potenzreihen ist die Frage von Interesse, auf welchen Teilmengen der Konvergenzmenge gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Satz. Eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit Konvergenzradius R , $0 < R \leq \infty$ konvergiert auf jeder **kompakten** Teilmenge der Konvergenzmenge gleichmäßig.

Beweis. Zu jeder kompakten Menge $X \subseteq U_R(x_0)$ gibt es ein r mit $0 < r < R$ mit $X \subseteq U_r(x_0) \subseteq U_R(x_0)$. Dann ist aber die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ gemäß früher absolut konvergent und wegen der auf X gültigen Abschätzung $|a_k(x-x_0)^k| \leq |a_k| r^k$ nach dem Weierstrass Kriterium auf X gleichmäßig konvergent. $\square$

Satz. Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R , $0 < R \leq \infty$. Dann gilt für die von der Reihe erzeugte Funktion $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$:

1) $A(x)$ ist stetig auf $U_R(x_0)$,

2) $A(x)$ ist auf $U_R(x_0)$ beliebig oft differenzierbar, und es gilt dort für die n-te Ableitung

$$A^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n} = n! \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k(x-x_0)^{k-n}$$

wobei diese Potenzreihe ebenfalls den Konvergenzradius R besitzt,

3) $A(x)$ ist auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq U_R(x_0)$ R-integrierbar und die Potenzreihe darf gliedweise integriert werden, i.e.

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_a^b (x-x_0)^k dx \right) .$$

Beweis.

zu 1) : Sei $x \in U_R(x_0)$. Dann gibt es eine **kompakte** Umgebung $U(x)$ von x mit $U(x) \subseteq U_R(x_0)$. Auf $U(x)$ liegt gleichmäßige Konvergenz vor und nach einer früheren Aussage ist $A(x)$ damit stetig in x .

zu 2) : Wir zeigen zuerst, dass die Reihe der Ableitungen den gleichen Konvergenzradius R besitzt.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1} = \tfrac{1}{x-x_0} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^k = \tfrac{1}{x-x_0} \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$$

wobei $b_k = k a_k$.

$\frac{1}{R^*} = \limsup\limits_{k\to\infty} |b_k|^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} \limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{R}$, weil $\lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} = 1$.

Die Reihe der Ableitungen konvergiert dann auf jeder kompakten Teilmenge X (insbesondere auf kompakten Umgebungen) von $U_R(x_0)$ gleichmäßig. Da die Potenzreihe selbst z.B. für x_0 konvergiert, ist nach einem früheren Satz die Summenfunktion in jedem $x \in U_R(x_0)$ differenzierbar und die Potenzreihe darf gliedweise differenziert werden.

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich der Beweis für die höheren Ableitungen.

zu 3) : $A(x)$ ist stetig auf $[a,b]$ und $a_k(x-x_0)^k$ ist R-integrierbar auf $[a,b]$. Gemäß früher ist dann auch $A(x)$ R-integrierbar auf $[a,b]$ und die Potenzreihe darf gliedweise integriert werden. Der Konvergenzradius der gliedweise integrierten Potenzreihe ist (analog zur gliedweise differenzierten Potenzreihe) wiederum R . $\square$

Wir zeigten früher, dass unter gewissen Voraussetzungen eine Funktion $f(x)$ eine Taylor-Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ besitzt, die auf gewissen Intervallen auch die Funktion darstellt.

Andererseits stellen Potenzreihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ auf ihrem Konvergenzintervall $U_R(x_0)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion $A(x)$ dar.

Welcher Zusammenhang besteht hier?

Satz. Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R , $0 < R \leq \infty$, und bezeichne $A(x)$ die Summenfunktion.

Dann gilt für alle $n \geq 0$, dass $a_n = \frac{A^{(n)}(x_0)}{n!}$, d.h. es ist

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \ .$$

Beweis. $A^{(n)}(x) = n! \sum\limits_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k(x-x_0)^{k-n}$. Für $x \to x_0$ folgt dann $A^{(n)}(x_0) = n! a_n$. $\square$

Bemerkungen.

(i) $A(x)$ ist auf $U_R(x_0)$ bereits durch die Werte auf einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 vollständig bestimmt.

(ii) Potenzreihen erscheinen formal als Polynome "unendlich hohen Grades". Bei Polynomen wissen wir, dass zwei Polynome vom Grad n identisch sind, wenn sie an mindestens $n+1$ Stellen übereinstimmen. Für zwei Potenzreihen ist es allerdings nicht ausreichend, dass sie nur an unendlich vielen Punkten übereinstimmen, wie das Beispiel der beiden Funktionen $f(x) = \sin(\pi x)$ und $g(x) \equiv 0$ zeigt, die an allen ganzzahligen x übereinstimmen, aber nicht identisch sind.

Satz. (**Identitätssatz für Potenzreihen**)

Besitzen $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ an unendlich vielen von x_0 verschiedenen Stellen $x_1, x_2, \ldots$, die sich an x_0 häufen, denselben Wert, i.e. $A(x_i) = B(x_i)$, dann gilt $a_k = b_k \quad \forall\ k$, d.h. $A(x) = B(x)$ auf $X = U_{R_1}(x_0) \cap U_{R_2}(x_0)$.

Bemerkung. Dieser Identitätssatz wird in der Funktionentheorie verallgemeinert und ist dort ein mächtiges Werkzeug zum Beweis vieler Sätze (z.B. die Eindeutigkeit der Fortsetzung von holomorphen Funktionen).

Zum Abschluß sei ohne Beweis ein interessanter Satz von Abel erwähnt.

Satz. (**Abelscher Grenzwertsatz**)

Sei $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = 1$. Ist die Potenzreihe auch an $x = 1$ konvergent, i.e. konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, dann gilt

$$\lim_{x \to 1^-} A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ .$$