Kurven im $\mathbb{R}^n$

Der Begriff der Kurve, zunächst etwa im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, kann auf zwei Arten gebildet werden. Der **geometrische Zugang** definiert eine Kurve als den geometrischen Ort von Punkten in der Ebene bzw. im Raum, der durch gewisse Eigenschaften festgelegt ist, - wie etwa ein Kreis in der Ebene als Menge aller Punkte (der Ebene) festgelegt ist, welche einen konstanten Abstand zu einem festen Punkt haben.

Der **kinematische Zugang** definiert eine Kurve als "Bahnkurve" eines bewegten Punktes, wobei die Bewegung durch eine Gesetzmäßigkeit festgelegt ist, - wie etwa im Falle der Archimedischen Spirale, bei der ein Punkt auf einem gleichförmig rotierenden Strahl sich gleichförmig nach außen bewegt.

Mit der Einführung der analytischen Geometrie durch Descartes lassen sich Kurven durch analytische Beziehungen zwischen den Koordinaten ihrer Punkte (und damit durch Funktionen) beschreiben.

Für ebene Kurven (Kurven im $\mathbb{R}^2$) existieren etwa

(i) die **explizite Darstellung** $y = f(x)$ bzw. $x = g(y)$

(ii) die **Polarkoordinatendarstellung** $r = r(\varphi)$

(iii) die **implizite Darstellung** $F(x, y) = 0$

(iv) die **Parameterdarstellung** $x = x(t)$, $y = y(t)$

Raumkurven (Kurven im $\mathbb{R}^3$) lassen sich oft auch als Schnittlinien von Flächen im $\mathbb{R}^3$ definieren. Für eine Verallgemeinerung auf Kurven im $\mathbb{R}^n$ eignet sich am besten die Parameterdarstellung.

Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Die Menge $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\ t \in I \text{ mit } x = f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))\}$ heißt **Kurve** im $\mathbb{R}^n$.

Ist $I = [a, b]$ und $f(a) = f(b)$, dann heißt K eine **geschlossene** Kurve.

Ist f injektiv, dann heißt K eine **Jordan-Kurve**.

Bemerkungen.

1) Als stetiges Bild eines Intervalls ist K zum einen eine "zusammenhängende" und "eindimensionale" Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

2) Der Graph einer Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ ist eine Kurve $f : I \to \mathbb{R}^2$ durch $f_1(t) = t$, $f_2(t) = g(t)$.

3) Eine Parameterdarstellung induziert (wegen der Ordnung auf I) auf K einen Durchlaufsinn bzw. Orientierung. Ist etwa $I = [a, b]$, dann heißt $f(a)$ der **Anfangspunkt** und $f(b)$ der **Endpunkt** von K .

4) Da ein Punkt des $\mathbb{R}^n$ auch durch seinen Ortsvektor bestimmt ist, verwendet man oft auch die vektorielle Darstellung einer Kurve K : $\vec{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$.

Beispiele.

i) Sei $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi]$.

K ist dann der obere Teil des Einheitskreises und ist eine Jordan-Kurve.

ii) Sei $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $t \in [-1, 1]$.

K ist dann ebenfalls der obere Teil des Einheitskreises.

iii) Sei $f_1(t) = r \cos t$, $f_2(t) = r \sin t$, $f_3(t) = ct$, $r, c > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

K ist dann eine Schraublinie und ist auch eine Jordan-Kurve.

Wie oben ersichtlich, kann eine Kurve K verschiedene Parameterdarstellungen haben.

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ Parameterdarstellungen.

Gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ mit $\varphi'(t) > 0$ auf $[a, b]$ (und damit ist φ bijektiv) , $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ sowie $f(t) = g(\varphi(t))$ $\forall\, t \in [a, b]$, dann heißen die beiden Parameterdarstellungen

äquivalent .

Man beachte, dass äquivalente Parameterdarstellungen ein und dieselbe Kurve darstellen. Auch die Orientierung bleibt gleich. Unterschiedlich ist die "Durchlaufgeschwindigkeit". Wählt man ein φ mit $\varphi'(t) < 0$, dann kehrt sich die Orientierung von K um.

Sei nun eine Kurve K in vektorieller Darstellung $\vec{f}(t)$, $t \in [a,b]$ mit differenzierbaren Komponentenfunktionen $f_i(t)$ gegeben. Dann ist

$$\frac{\vec{f}(t+h)-\vec{f}(t)}{h} = \left(\frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h}, \cdots, \frac{f_n(t+h)-f_n(t)}{h} \right) .$$

Der Grenzübergang $h \to 0$ liefert $\vec{f}'(t) = \frac{d\vec{f}}{dt}(t) = (f_1'(t), \cdots, f_n'(t))$.

Im Falle $\vec{f}'(t) \neq 0$ kann dieser Vektor normiert werden (zur Länge 1), und $\vec{T}_f(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$ heißt dann der **Einheits-Tangentenvektor** im Punkt $f(t)$ bezüglich der Darstellung $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Die Gerade $\vec{x} = \vec{f}(t) + \lambda \vec{f}'(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Tangente** an die Kurve K im Punkt $f(t)$.

Bemerkung. Äquivalente Parameterdarstellungen liefern dieselben Tangenten-Einheitsvektoren.

Definition. Sei eine Kurve K durch $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gegeben.

(i) K heißt **glatt**, wenn $\vec{f}'(t)$ existiert, stetig und überall $\neq 0$ ist (und somit $\vec{T}_f(t)$ existiert).

(ii) K heißt **stückweise glatt**, wenn es eine Partition von $[a,b]$ gibt und K auf jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ glatt ist.