Funktionen von beschränkter Schwankung

Funktionen von beschränkter Schwankung sind eine Klasse von Funktionen, mit deren Hilfe jene Kurven charakterisiert werden, denen überhaupt eine "Länge" zugeschrieben werden kann.

Definition. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Gibt es eine Konstante $M > 0$, sodass für alle Partitionen $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$ gilt, dass $V_P(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M$, dann heißt f von **beschränkter Schwankung** (Variation) auf $[a,b]$.

Schreibweise : $f \in BV[a,b]$.

Ist $f \in BV[a,b]$, dann heißt $V_a^b(f) = \sup\limits_P V_P(f)$ die **Totalvariation** von f auf $[a,b]$.

Bemerkung. Trivialerweise gilt $V_a^b(f) = V_a^b(-f)$.

Satz. Jede **monotone** Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auf $[a,b]$ von beschränkter Schwankung.

Beweis. Sei f monoton wachsend und $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$. Dann ist

$$V_P(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a) \ .$$

Folglich ist $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$. Der Fall monoton fallender Funktionen ist analog. $\square$

Bemerkung. Stetige Funktionen sind i.a. **nicht** von beschränkter Schwankung, wie man sich am Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x} & \text{falls } x \in (0,2] \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{überzeugen kann.}$$

Satz. Seien $f, g \in BV[a,b]$. Dann gilt

1) f ist beschränkt auf $[a,b]$,

2) $f \pm g \in BV[a,b]$ und $fg \in BV[a,b]$.

Beweis.

zu 1) Wähle $x \in [a,b]$ beliebig. Dann gilt

$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| = V_P(f) \leq V_a^b(f)$ wobei $P = \{a, x, b\}$.

Damit gilt aber für alle $x \in [a,b]$, dass

$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq V_a^b(f) + |f(a)| \leq M$

zu 2) Als Übung. $\square$

Ohne Beweis sei die Eigenschaft der **Additivität der Totalvariation** erwähnt. Ist $f \in BV[a,b]$ und $c \in [a,b]$, dann ist auch $f \in BV[a,c]$ und $f \in BV[c,b]$ und es gilt $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

Wir zeigten, dass monotone Funktionen von beschränkter Schwankung sind. Umgekehrt ist eine Funktion von beschränkter Schwankung i.a. natürlich nicht monoton. Nichtsdestoweniger besteht ein enger Zusammenhang zu monotonen Funktionen.

Satz. Sei $f \in BV[a,b]$ und setze $V(x) = V_a^x(f)$, wenn $a < x \leq b$ und $V(a) = 0$. Dann gilt

1) $V(x)$ ist monoton wachsend auf $[a,b]$,

2) $V(x) \pm f$ sind monoton wachsend auf $[a,b]$.

Beweis. zu 1) : Sei $a < x_1 < x_2 < b$. Gemäß vorher gilt dann

$V_a^{x_2}(f) = V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f)$ und damit $V(x_2) - V(x_1) = V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f) \geq 0$.

zu 2) : $\{x_1, x_2\}$ ist eine Partition von $[x_1, x_2]$ und es gilt

$\mp f(x_2) \pm f(x_1) \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq V_{x_1}^{x_2}(f)$, woraus folgt

$(V(x_2) \pm f(x_2)) - (V(x_1) \pm f(x_1)) = V_{x_1}^{x_2}(f) + (\pm f(x_2) \mp f(x_1)) \geq 0$. $\square$

Satz. $f \in BV[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, f^+ , f^-$ monoton wachsend auf $[a,b]$ und es gilt $f = f^+ - f^-$.

D.h. Jede Funktion von beschränkter Schwankung läßt sich als Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen darstellen.

Beweis.

" $\Leftarrow$ " : Die montonen Funktionen f^+ , f^- sind von beschränkter Schwankung, und damit gemäß vorher auch $f = f^+ - f^-$.

" $\Rightarrow$ " : Setze $f^+(x) = \frac{V(x)+f(x)}{2}$ und $f^-(x) = \frac{V(x)-f(x)}{2}$. Nach dem vorigen Satz sind f^+ , f^- monoton wachsend und es gilt $f = f^+ - f^-$.
$\square$

Weitere Bemerkungen.

1) Sei $f \in BV[a,b]$. Dann ist durch $\|f\| = |f(a)| + V_a^b(f)$ eine Norm, die **Variationsnorm**, gegeben.

2) Genügt f auf $[a,b]$ einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten L , dann ist f von beschränkter Schwankung und es gilt $V_a^b(f) \leq L(b-a)$.

3) f stetig differenzierbar auf $[a,b] \quad \Rightarrow \quad V_a^b(f) = \int\limits_a^b |f'(x)|dx$.