Die Bogenlänge von Kurven

Im Rahmen der Integralrechnung haben wir für Kurven, die als Graphen von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert sind, den Begriff der Bogenlänge eingeführt. Im Falle, dass f stetig differenzierbar ist, gilt dann $L(C_f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$.

Analog dazu werden wir den Begriff der Bogenlänge für Kurven im $\mathbb{R}^n$, dargestellt durch $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, einführen. Des weiteren werden wir jene Kurven, denen überhaupt eine Länge zugeordnet werden kann, charakterisieren.

Wir betrachten wiederum eine Partition $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m = b\}$ des Intervalls $[a, b]$, und erhalten die Punkte $P_i = f(t_i)$.

Die Kurve wird nun durch den Polygonzug durch $P_0, P_1, \dots, P_m$ approximiert. Dieser besitzt die Länge

$$L_P(K) = \sum_{i=1}^{m} \|f(t_{i-1}) - f(t_i)\| = \sum_{i=1}^{m} d(f(t_{i-1}), f(t_i)) \ .$$

Bei Verfeinerung der Zerlegung wächst die Länge des entsprechenden Polygonzuges und damit ist es möglich, dass es keine obere Schranke für die Länge aller Polygonzüge gibt.

Defintion. Sei K eine Jordan-Kurve im $\mathbb{R}^n$ mit der Darstellung $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Existiert eine Konstante M sodass für **alle** Paritionen $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m = b\}$ von $[a, b]$ gilt

$L_P(K) = \sum\limits_{i=1}^{m} \|f(t_{i-1}) - f(t_i)\| \leq M$, dann heißt K **rektifizierbar** .

Ist K rektifizierbar, dann heißt $L(K) = \sup\limits_P L_P(K)$ die **Bogenlänge** von K .

Bemerkung. Sei $g : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ eine äquivalente Parameterdarstellung von K . Jeder Partition von $[a, b]$ entspricht dann genau eine Partition von $[c, d]$, und die entsprechenden Polygonzüge sind gleich. Daraus folgt, dass die oben definierte Bogenlänge unabhängig von der Parameterdarstellung ist.

Satz. Sei K eine Jordan-Kurve im $\mathbb{R}^n$ mit der Darstellung $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Dann gilt

K ist rektifizierbar $\quad \Leftrightarrow \quad f_i \in BV[a, b] \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$

Beweis. "$\Leftarrow$" : Sei $f_i \in BV[a, b] \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$, und $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine beliebige Partition von $[a, b]$.

Dann gilt für alle $k = 1, \ldots, m$

$$d\,(f(t_{k-1}), f(t_k)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(t_k) - f_i(t_{k-1}))^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})|$$

und damit

$$L_P(K) = \sum_{k=1}^{m} d\,(f(t_{k-1}), f(t_k)) \leq \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \right) \leq \sum_{i=1}^{n} V_a^b(f_i) \leq M \ .$$

"$\Rightarrow$" : Sei K rektifizierbar und $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine beliebige Partition von $[a, b]$.

Für $i = 1, \ldots, n$ und $k = 1, \ldots, m$ gilt dann

$|f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \leq d\,(f(t_{k-1}), f(t_k))$ und damit

$$\sum_{k=1}^{m} |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{m} d\,(f(t_{k-1}), f(t_k)) \leq L(K) \ .$$

Dies heißt aber, dass $f_i \in BV[a, b] \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$. $\square$

Ohne Beweis seien die beiden nächsten wichtigen Ergebnisse angeführt.

Satz. Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve, dargestellt durch $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Ist $a < c < b$, dann sind auch die Teilkurven, dargestellt durch f auf $[a,c]$ bzw. $[c,b]$ rektifizierbar und es gilt $L_a^b = L_a^c + L_c^b$.

Satz. Sei K eine **glatte** rektifizierbare Jordan-Kurve, dargestellt durch $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Dann gilt : $L(K) = \int\limits_a^b \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (f_i'(t))^2} dt = \int\limits_a^b \left\| \vec{f}'(t) \right\| dt$