Krümmung von ebenen Kurven

Wir suchen ein Maß für die Abweichung einer Kurve von der Tangente in einem Kurvenpunkt.

Ist die Kurve in expliziter Form $y = y(x)$ gegeben, dann gibt y' die Neigung der Tangente an. y'' gibt die Änderung der Neigung der Tangente in Abhängigkeit von x an (diese Betrachtung führt zur sogenannten "Näherungsparabel").

Wir interessieren uns nun für die Änderung des Steigungswinkels mit der Bogenlänge der Kurve, i.e. $\frac{d\alpha(s)}{ds}$.

$$\alpha(s) = \widetilde{\alpha}(x(s)) \quad , \quad s(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2}dx$$

Wir erhalten $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\tilde{\alpha}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\tilde{\alpha}}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}}$ und mit $\widetilde{\alpha} = \arctan y'$ folgt

$\frac{d\widetilde{\alpha}}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2} \quad , \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$ und damit

$$\frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = k(s) \ .$$

$k(s)$ heißt die **Krümmung** der Kurve im Punkt $(x, y(x))$.

Ist die Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben und lokal $\dot{x}(t) \neq 0$, dann ist $t = t(x)$ und

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ sowie

$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$. Folglich ist

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3\left[1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

Beispiel. Betrachte die Parabel $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.

Dann ist $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$, $\dot{y} = 2t$, $\ddot{y} = 2$ und somit

$k(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$. Für die Krümmung im Scheitel $(t = 0)$ ergibt sich im speziellen $k(0) = 2$.

Nun suchen wir einen Kreis, der die Kurve im Punkt $(x, y(x))$ möglichst gut annähert. Dabei sollen für Kreis und Kurve in $(x, y(x))$ sowohl Steigung y' als auch y'' übereinstimmen.

Der gesuchte Kreis habe die Gleichung $(\tilde{x} - \xi)^2 + (\tilde{y} - \eta)^2 = \varrho^2$.

Differentiation nach $\tilde{x}$ liefert $2(\tilde{x} - \xi) + 2(\tilde{y} - \eta)\tilde{y}' = 0$ bzw.

$\tilde{y}' = -\frac{\tilde{x}-\xi}{\tilde{y}-\eta}$.

In $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$ soll gelten $\tilde{y}' = y'$. Damit ist $y' = -\frac{x-\xi}{y-\eta}$.

Differentiation von $\tilde{y}'(\tilde{y} - \eta) = -(\tilde{x} - \xi)$ nach $\tilde{x}$ liefert

$1 + \tilde{y}'^2 + (\tilde{y} - \eta)\tilde{y}'' = 0$ bzw. $\tilde{y}'' = -\frac{1+\tilde{y}'^2}{\tilde{y}-\eta}$.

In $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$ soll gelten $\tilde{y}'' = y''$. Damit ist $y'' = -\frac{1+y'^2}{y-\eta}$.

Wir erhalten $y - \eta = -\frac{1+y'^2}{y''}$ und $x - \xi = -y'(y - \eta) = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$.

Einsetzen in die Kreisgleichung im Punkt (x, y) liefert

$\frac{y'^2(1+y'^2)^2}{y''^2} + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = \varrho^2$ und folglich $\varrho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$.

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist (siehe oben)

$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$, $\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$.

Bemerkung. Ist $\vec{x} = (x(t), y(t))$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$\varrho = \frac{1}{|k|} = \frac{(\dot{x}^2+\dot{x}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}$, $\xi(t) = x(t) - \dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}$, $\eta(t) = y(t) + \dot{x}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}$.

Definition. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Krümmungskreise (Krümmungsmittelpunkte) einer Kurve $y(x)$ heißt **Evolute**.

Beispiel. Wir betrachten die Ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Eine Parameterdarstellung ist $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$.

Für die Evolute erhalten wir gemäß vorher

$\xi(t) = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \quad , \quad \eta(t) = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$.

Für eine Darstellung in kartesischen Koordinaten setzen wir

$A = \frac{a^2-b^2}{a} \quad , \quad B = \frac{b^2-a^2}{b}$ und erhalten

$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{2/3} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{2/3} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Dabei handelt es sich um eine "gestreckte" bzw. "gestauchte" Astroide.