Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Definition. Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x(u,v)$, $y \mapsto y(u,v)$ bezeichnet man auch als eine **Koordinatentransformation** der xy-Ebene in die uv-Ebene.

Ist die Abbildung g in einem Punkt lokal umkehrbar, dann heißt dieser Punkt **regulär**, andernfalls **singulär**.

Bemerkung. Die Frage nach der lokalen Umkehrbarkeit läßt sich zumeist mittels des Satzes über die Umkehrfunktion beantworten : die Jacobi-Determinante ist im untersuchten Punkt $\neq 0$.

Beispiel. (Ebene Polarkoordinaten)

Betrachte $x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$, wobei $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Jeder Punkt der xy-Ebene wird durch einen Punkt des Bereiches für r und φ repräsentiert.

Für die Jacobi-Determinante gilt $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$.

Damit ist $r = 0$ ein singulärer Punkt (besitzt keinen eindeutig definierten Winkel). Alle anderen Punkte des $r\varphi$-Bereiches sind regulär.

Die Umkehrfunktion läßt sich im Falle $x \neq 0$ mittels

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ beschreiben.

Aufgabe. Man zeige, dass durch $x(u,v) = u + v$, $y(u,v) = \frac{v}{u}$ der erste Quadrant der xy-Ebene in den ersten Quadranten der uv-Ebene abgebildet wird.

Wichtige Koordinatentransformationen im $\mathbb{R}^3$:

Zylinderkoordinaten

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, z , wobei $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Für die Jacobi-Determinante gilt

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \ .$$

Somit besteht die z-Achse aus singulären Punkten.

Die Umkehrung ist durch $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$ gegeben.

Kugelkoordinaten

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ wobei

$r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Beachte, dass $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Der Winkel ϑ wird von der positiven z-Achse weg gemessen.

Für die Jacobi-Determinante erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} = \cdots = r^2\sin\vartheta$$

$r = 0$ (der Ursprung) ist ein singulärer Punkt, $\sin\vartheta = 0$ wenn $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$. Damit sind alle Punkte der z-Achse singuläre Punkte (sie besitzen keinen eindeutig bestimmten Winkel φ).

Als **Koordinatenlinien** erhalten wir

- r , φ konstant , ϑ beliebig : Meridiane (Längenkreise)
- r , ϑ konstant , φ beliebig : Breitenkreise
- ϑ , φ konstant , r beliebig : Strahlen

Als **Koordinatenflächen** erhalten wir

r konstant , ϑ , φ beliebig : Kugelflächen

φ konstant , r , ϑ beliebig : Halbebenen durch z-Achse

ϑ konstant , r , φ beliebig : Kegel