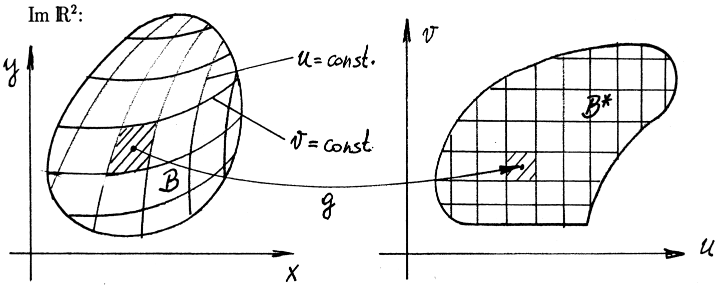
Transformationsformel und Parameterintegrale



Wir betrachten die Koordinatentransformation $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ und die Abbildung $g : B \to B^*$ sei bijektiv.

Des weiteren sei die Abbildung f stückweise stetig auf B .

Dann gilt

Satz. (**Transformationsformel im** $\mathbb{R}^2$) (ohne Beweis)

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \iint_{B^*} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Dabei ist $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ der Absolutbetrag der Jacobi-Determinante.

Plausible Begründung. $\iint_B f(x,y)dxdy$ ist der Limes einer Riemann-Summe über Rechteckszerlegungen in der xy-Ebene.

Jeder solchen Zerlegung entspricht eine Zerlegung in "verzerrte" Rechtecke (näherungsweise Parallelogramme) in der uv-Ebene, i.e.

$S_P(f;\xi,\eta) = \sum\sum f(x(\tilde{u},\tilde{v}),y(\tilde{u},\tilde{v})) \times$Flächeninhalt des krummlinigen Rechtecks.

Ist g : $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ stetig differenzierbar, dann ist eine Linearisierung möglich, d.h. die krummlinigen Rechtecke lassen sich durch Parallelogramme approximieren.

Mit $\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}$, $\vec{t}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ erhalten wir für die Fläche des Parallelogramms

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| .$$

Also

$$S_P(f;\xi,\eta) \approx \sum_i \sum_j f(x(\tilde{u},\tilde{v}), y(\tilde{u},\tilde{v})) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \triangle u_i \triangle v_j \to \iint_B f(x,y)dxdy$$

für $|P| \to 0$.

Im $\mathbb{R}^3$ erhalten wir analog

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{B^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw \ .$$

Beispiel. $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \sqrt{1+x^2+y^2}\ dxdy$ (siehe vorher: Flächeninhalt der Sattelfläche $z = xy$)

Einführung von Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \ \Rightarrow$ $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| = r$. Also

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} r\sqrt{1+r^2}drd\varphi = 2\pi \int\limits_0^1 r\sqrt{1+r^2}dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1) \ .$$

Beispiel. $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} re^{-r^2}drd\varphi =$

$$= 2\pi\left(-\tfrac{1}{2}\right) \int\limits_0^R -2re^{-r^2}dr = -\pi\ e^{-r^2}\Big|_0^R = \pi(1-e^{-R^2}) \ .$$

Speziell ergibt sich für $R \to \infty$: $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$.

Bemerkung. Betrachten wir das uneigentliche Integral

$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$, dann können wir schreiben

$$\iint\limits_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2 ,$$

also $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Definition. Eine Funktion $F(x)$ der Form $F(x) = \int\limits_a^b f(x,t) dt$ heißt **Parameterintegral** mit Kern $f(x,t)$.

Satz. Seien $f(x,t)$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ auf $[c,d] \times [a,b]$ stetig.
Dann ist $F(x)$ auf $[c,d]$ differenzierbar und es gilt

$F'(x) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt$. ("Differentiation unter dem Integral")

Beweis. Sei $x_0 \in [c,d]$. Weil f stetig an (x_0, t) ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ sodass $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon$.

Mit $\frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta(x-x_0), t)$ gilt dann

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int\limits_a^b \frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} dt = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta(x-x_0), t) dt =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) dt + \int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta(x-x_0), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right] dt .$$

Mit $x \to x_0$ folgt dann $F'(x) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt$. $\square$

Bemerkung. Analoges gilt auch für mehrfache Parameterintegrale

$F(u_1, \ldots, u_m) = \underset{B}{\int \cdots \int} f(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \quad \Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \underset{B}{\int \cdots \int} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \quad , \; i = 1, \ldots, m \; .$