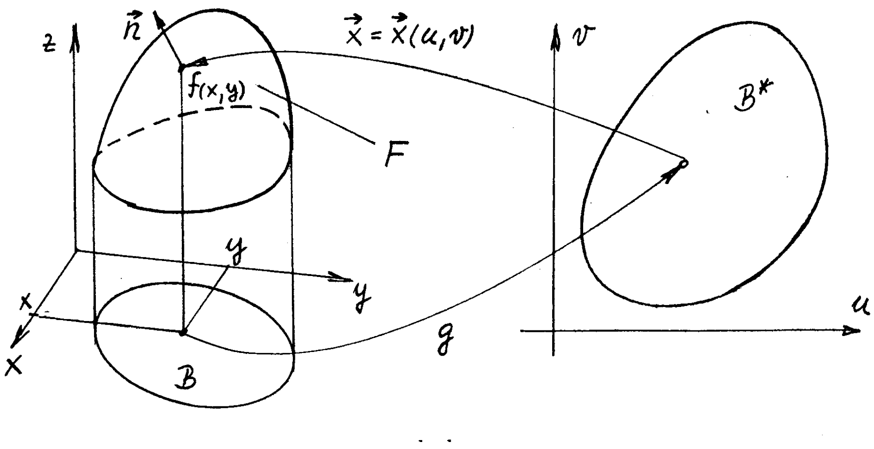
Oberflächenintegrale

Oberflächenbestimmung in Parameterdarstellung



Zur Erinnerung: In kartesischen Koordinaten war die Oberfläche gegeben durch

$$O(F) = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy = \iint_B \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \iint_B do$$

wobei γ den Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ und dem Koordinatenvektor $\vec{e}_3$ bezeichnet.

do ... **Oberflächenelement** in kartesischen Koordinaten

Sei nun $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right| \\ -\left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right| \\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$|\cos\gamma| = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{e}_3}{\|\vec{n}\|}\right| = \left|\frac{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}{\|\vec{x}_u\times\vec{x}_v\|}\right| \ .$$

Somit $\quad O(F) = \iint_{B^*} \frac{\|\vec{x}_u\times\vec{x}_v\|}{\left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|} \left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\| dudv = \iint_{B^*} \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|\, dudv$.

Bemerkung. $\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| = \sqrt{\|\vec{x}_u\|^2\,\|\vec{x}_v\|^2 - (\vec{x}_u\cdot\vec{x}_v)^2}$.

Mit $E = \|\vec{x}_u\|^2$, $F = (\vec{x}_u\cdot\vec{x}_v)$, $G = \|\vec{x}_v\|^2$ ist dann

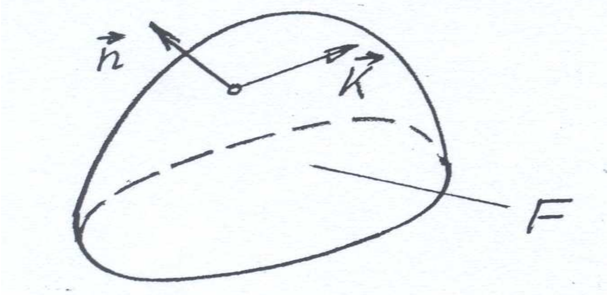
$do = \sqrt{EG - F^2}dudv$ das **Oberflächenelement** in allgemeiner Parameterform.

Definition. $d\vec{o} = (\vec{x}_u\times\vec{x}_v)dudv$ heißt **vektorielles Oberflächenelement** der Fläche $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$.

$|d\vec{o}| = do$, eine **Orientierung** der Fläche ist durch die Richtung der Flächennormalen gegeben.

Fluß durch eine Fläche

Sei $F : \vec{x}(u,v)$ ein Flächenstück und $\vec{K} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ ein sogenanntes "Vektorfeld", d.h. eine Abbildung $\vec{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.



$\Phi(F)$ sei der Fluß durch F (”Anzahl der Feldlinien” durch die Fläche) . Als Maß für den Fluß wählen wir die Projektion von $\vec{K}$ parallel zu $\vec{n}$ mal Flächenelement do , summiert über die gesamte Fläche.

$$\Rightarrow \ \Phi(F) = \lim_{|P| \to 0} \sum \sum (\vec{K} \cdot \vec{n}) \triangle u \triangle v = \iint_{B^*} (\vec{K} \cdot \vec{n}) du dv$$

Wegen $\vec{n} = (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)$ ist $\vec{K} \cdot \vec{n} = (\vec{K}, \vec{x}_u, \vec{x}_v)$ das Spatprodukt der Vektoren $\vec{K}$, $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$.

Definition. $\Phi(F) = \iint_{B^*} \vec{K} \cdot d\vec{o} = \iint_{B^*} (\vec{K}, \vec{x}_u, \vec{x}_v) du dv$ heißt **Oberflächenintegral von $\vec{K}$ durch F** . (Physikalisch bedeutet dies den Fluß des Feldes $\vec{K}$ durch F) .

Bemerkung. Wegen $\left| \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right| = - \left| \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} \right|$ ist

$$\Phi(F) = \iint_{B*} \vec{K} \cdot d\vec{o} =$$

$$= \iint_{B^*} \left(P \left| \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right| du dv + Q \left| \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right| du dv + R \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \right) =$$

$$\iint_F (P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy)$$

mit den Bezeichnungsweisen $\left| \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right| du dv = dy \wedge dz$, $\left| \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right| du dv = dz \wedge dx$, $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv = dx \wedge dy$.

Beispiel.

$F: \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ und $\vec{K} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\Phi(F) = \iint_{B^*} \vec{K} \cdot d\vec{o} = \iint_{B^*} (\vec{K} \cdot \vec{n}) du dv$$

Wir verwenden Kugelkoordinaten $x = R \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = R \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = R \cos \vartheta$ und $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Dann ist $\vec{x}_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}$, $\vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{n} = \vec{x}_\vartheta \times \vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ R^2\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix} .$$

$\vec{K} = \frac{1}{R^3}\begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ und

$$\vec{K}\cdot\vec{n} = \sin^3\vartheta\cos^2\varphi + \sin^3\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta\sin\vartheta = \sin^3\vartheta + \cos^2\vartheta\sin\vartheta =$$
$$= \sin\vartheta(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = \sin\vartheta \ .$$

Also ist

$$\Phi(F) = \int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\vartheta d\varphi d\vartheta = 2\pi \int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta = 2\pi \left(-\cos\vartheta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \ .$$