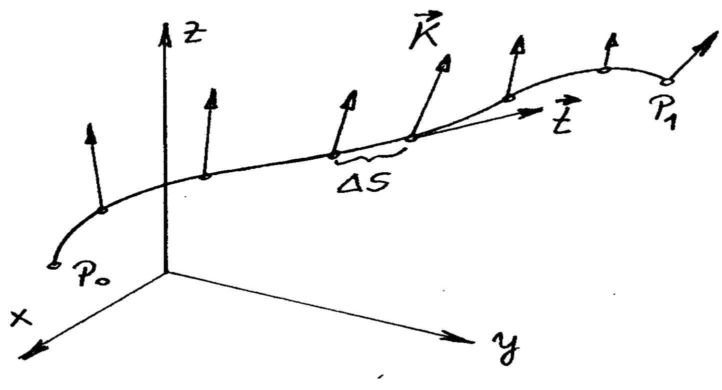
Kurvenintegrale

Eine Motivation für Kurvenintegrale liegt in der Berechnung der physikalischen Arbeit einer Kraft $\vec{K}$ längs eines Weges (Kurve).

Gegeben sei eine Kurve $C: \ \vec{x}(t)$ und ein

Vektorfeld (Kraftfeld) $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$.



$\triangle W = (\vec{K} \cdot \vec{t})\triangle s \quad , \quad \triangle s \approx \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\triangle t = \|\dot{\vec{x}}\|\triangle t$

$\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$, $\vec{t} \ldots$ Tangenteneinheitsvektor und

$\alpha = \sphericalangle(\vec{t}, \vec{e}_1)$, $\beta = \sphericalangle(\vec{t}, \vec{e}_2)$, $\gamma = \sphericalangle(\vec{t}, \vec{e}_3)$.

$W(C) = \sum (\vec{K}, \vec{t})\triangle s = \sum (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\triangle s =$

$= \sum (P\cos\alpha\frac{\triangle s}{\triangle t} + Q\cos\beta\frac{\triangle s}{\triangle t} + R\cos\gamma\frac{\triangle s}{\triangle t})\triangle t =$

$= \sum (P\frac{\triangle x}{\triangle t} + Q\frac{\triangle y}{\triangle t} + R\frac{\triangle z}{\triangle t})\triangle t$

Dies läßt sich interpretieren als Riemann-Summe von

$$W(C) = \int_{t_0}^{t_1} \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right)dt = \int_{t_0}^{t_1} (P\dot{x}(t) + Q\dot{y}(t) + R\dot{z}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{K}, \dot{\vec{x}})dt$$

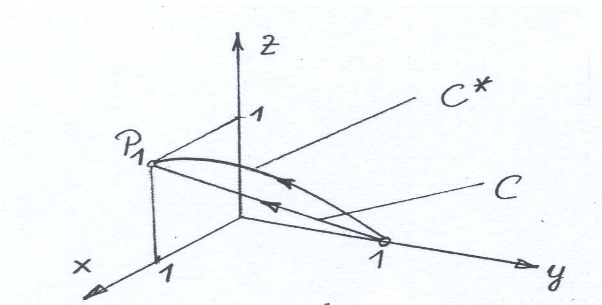
bzw. $W(C) = \int_{P_0}^{P_1} Pdx + Qdy + Rdz$.

Definition. Sei $\vec{K} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld und $C: \ \vec{x}(t) = (x(t), y(t)z(t))$ eine stückweise glatte Kurve. Dann heißt

$\int_C \vec{K} \cdot d\vec{s} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_{t_0}^{t_1} (P\dot{x}(t) + Q\dot{y}(t) + R\dot{z}(t))dt$ ein

Kurvenintegral über $\vec{K}$ längs C .

Beispiel. Sei $\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ yz \\ z^2 - x \end{pmatrix}$, $C: \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$.



Dann ist $\vec{K}(x(t), y(t), z(t)) = \begin{pmatrix} t \\ t - t^2 \\ t^2 - t \end{pmatrix}$ und $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also $\int_C \vec{K} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 [t + (-1)(t - t^2) + (t^2 - t)]dt = \int_0^1 (2t^2 - t)dt = \frac{1}{6}$

Beispiel. $\vec{K}$ wie vorher und $C^* : \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$.

Dann ist

$$\int_{C^*} \vec{K} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 [t^2 2t + (t-t^2)(-1)]dt = \int_0^1 (2t^3 - t + t^2)dt = \tfrac{1}{3} \ .$$

Bemerkung. Kurvenintegrale längs verschiedener Wege von P_0 nach P_1 sind somit im allgemeinen verschieden, d.h. sie sind "wegabhängig".

In vielen Anwendungen ist oft $W(C)$ vom Weg C unabhängig. Dies hängt von der Art des "Kraftfeldes" $\vec{K}$ ab.

Definition. Ein Kurvenintegral heißt **wegunabhängig**, wenn entlang eines beliebigen Weges von P_0 nach P_1 immer derselbe Wert vorliegt.

Folgerung. Ist $\int_C \vec{K} \cdot d\vec{s}$ wegunabhängig, dann ist $\oint_{\tilde{C}} \vec{K} \cdot d\vec{s} = 0$ für jeden **geschlossenen** Weg $\tilde{C}$.

Definition. Ein Vektorfeld $\vec{K}$ heißt **Gradientenfeld** mit **Potential** f , wenn $\vec{K} = \text{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$.

Das zugehörige "Differential" $Pdx + Qdy + Rdz$ heißt dann **exakt** (oder vollständig).

Bemerkungen.

• $Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$ ... "vollständiges Differential.

• In der Physik heißt ein Kraftfeld, das ein Gradientenfeld ist, **konservativ**. Beispiele dafür sind : elektrostatisches Feld, Gravitationsfeld.

Satz. Das Kurvenintegral eines Gradientenfeldes ist wegunabhängig.

Beweis. $\int_C \vec{K} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{t_0}^{t_1} (P\dot{x}(t) + Q\dot{y}(t) + R\dot{z}(t))dt =$

$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt =$

$= f(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = f(P_1) - f(P_0)$, d.h. der Wert hängt nur von P_0 und P_1 ab, nicht aber vom Verbindungsweg. $\square$

Bemerkung. $f(P_1) - f(P_0)$ heißt auch **Potentialdifferenz**.

Definition. Der "Vektordifferentialoperator" $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ heißt **Nabla-Operator** .

∇ läßt sich sowohl auf Skalarfunktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ als auch auf Vektorfunktionen $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ anwenden.

(i) $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathrm{grad} f(x, y, z)$ ... **Gradient** von f

(ii) $(\nabla, \vec{v})(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \mathrm{div} \vec{v}$ ... **Divergenz** von $\vec{v}$

(iii) $(\nabla \times \vec{v})(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathrm{rot} \vec{v}$ ... **Rotor** von $\vec{v}$.

(iv) $\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \triangle f$ ... **Laplace-Operator** von f

(im $\mathbb{R}^2$: $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)