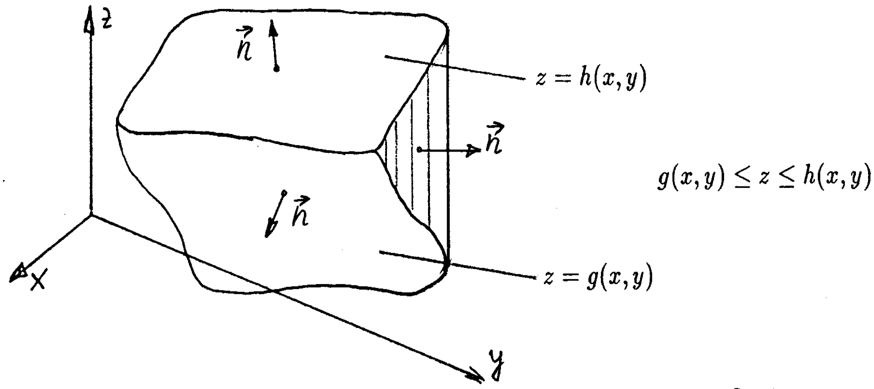
Die Integralsätze von Gauss, Green und Stokes

Satz. (Integralsatz von Gauss im $\mathbb{R}^3$)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein stückweise glatter Normalbereich und $\vec{K}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\iint_{\partial B} \vec{K} \cdot d\vec{o} = \iiint_B \mathrm{div}\vec{K} dV$$

(∂B ... Rand von B, ist so zu orientieren, dass der Normalenvektor nach außen zeigt)



Seien nun $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und weiters $\vec{K} = u \text{ grad} v = \left(u\frac{\partial v}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y}, u\frac{\partial v}{\partial z}\right)$.

Dann ist $\mathrm{div}\vec{K} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right) =$

$= u_x v_x + u v_{xx} + u_y v_y + u v_{yy} + u_z v_z + u v_{zz} =$

$= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z + u(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) =$

$= \mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} v + u \triangle v$

bzw. $\mathrm{div}\vec{K} = \mathrm{div}(u \text{ grad} v) = \nabla \cdot (u \nabla v) =$

$= \nabla u \cdot \nabla v + u \triangle v = \mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} v + u \triangle v$ (”Produktregel”)

Anwendung des Gauss’schen Satzes liefert

$\iiint_B \mathrm{div} \vec{K} dV = \iiint_B (\mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} v + u \triangle v) dxdydz =$
$= \iint_{\partial B} u \ \mathrm{grad} v \cdot d\vec{o} = \iint_{\partial B} u \ \vec{n} \cdot \mathrm{grad} v \ do$, wobei $d\vec{o} = \vec{n} do$.

Mit der Setzung $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \mathrm{grad} v$ erhalten wir

Satz. (**1. Green’sche Formel**)
$\iiint_B (\mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} v + u \triangle v) dxdydz = \iint_{\partial B} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} do$

Bemerkung. Mit $\vec{K} = v \ \mathrm{grad} u$ erhalten wir analog
$\iiint_B (\mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} v + v \triangle u) dxdydz = \iint_{\partial B} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} do$.

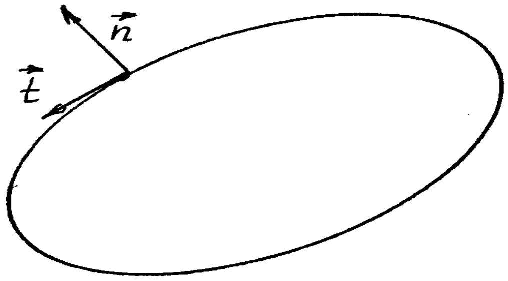
Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

Satz. (**2. Green’sche Formel**)
$\iiint_B (u \triangle v - v \triangle u) dV = \iint_{\partial B} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) do$

Satz. (**Gauss’scher Satz in der Ebene**)

$$\iint_B \mathrm{div} \vec{K} dxdy = \int_{\partial B} \vec{K} \cdot \vec{n} ds$$

Dabei ist ∂B so zu parametrisieren, dass B ”links” von ∂B liegt.



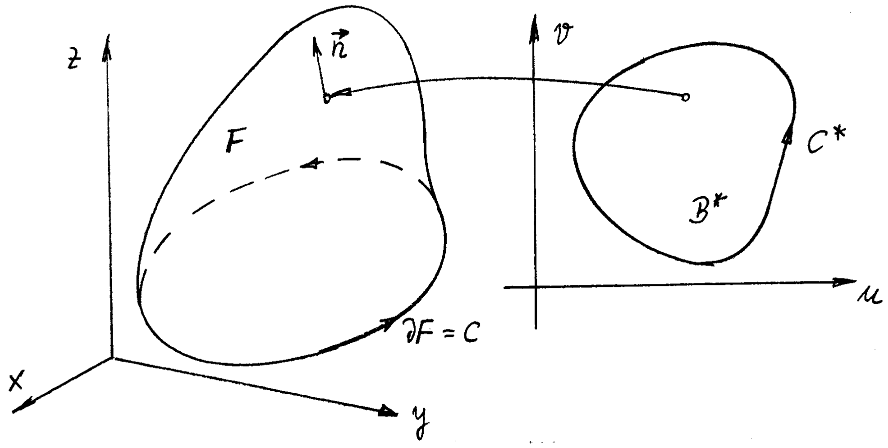
Eine Modifikation dieses Satzes liefert

Satz. (**Integralsatz von Green-Riemann**)

$$\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial B} Pdx + Qdy$$

(Wiederum ist ∂B so zu parametrisieren, dass B "links" von ∂B liegt.)

Sei nun $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in B^*$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Fläche.



Satz. (**Satz von Stokes**)

Sei $\vec{v} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und F eine stückweise glatte Fläche im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\iint_F \mathrm{rot}\vec{v} \cdot d\vec{o} = \oint\limits_{C=\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Bemerkungen.

1) Der Satz von Gauss besagt : $\iiint_B \mathrm{div}\vec{v}\; dV = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n}\; do$.

Die rechte Seite stellt den Fluß durch die gesamte Oberfläche von B dar. Er ist nur dann von Null verschieden, wenn im Inneren Feldlinien entspringen oder verschwinden, d.h. wenn "Quellen" oder "Senken" vorhanden sind.

Nach dem Mittelwertsatz gilt $\iiint_B \mathrm{div}\vec{v}\; dV = \mathrm{Vol}(B)\mathrm{div}v$.

Im Grenzfall $\mathrm{Vol}(B) \to 0$ folgt dann

$\mathrm{div}v = \lim\limits_{\mathrm{Vol}(B)\to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B)} \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n}\; do$ ... "Quellstärke"

2) Der Satz von Stokes besagt : $\iint_F \mathrm{rot}\vec{v} \cdot d\vec{o} = \oint\limits_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

Die rechte Seite stellt die "Zirkulation" von $\vec{v}$ längs ∂F dar.

Nach dem Mittelwertsatz gilt $\iint_F \mathrm{rot}\vec{v} \cdot d\vec{o} = (\mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{n})\mathrm{Vol}(F)$.

Im Grenzfall $\mathrm{Vol}(F) \to 0$ folgt dann

$\mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{n} = \lim\limits_{\mathrm{Vol}(F)\to 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}(F)} \oint\limits_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ ... "Wirbelstärke"

Beispiel. Sei $\vec{v} = (z^2 + y^2, x^2 + y^2, 2y^2)$. Man bestimme $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{o}$, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ jener Bereich ist, der von den Flächen $x^2 + y^2 = 1$, $z = x + y$ und $z = 10 - x - 2y$ eingeschlossen wird.

Nach dem Gauss'schen Satz ist $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \iiint_B \mathrm{div}\vec{v} dV$.

$\mathrm{div}\vec{v} = 2y$ und B kann beschrieben werden durch

$B: \ x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ x + y \leq z \leq 10 - x - 2y$.

Also $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \int\limits_{z=x+y}^{10-x-2y} 2y dx dy dz = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} 2y(10 - 2x - 3y) dx dy =$

$= \ \ldots$ (Polarkoordinaten !) $= -\frac{3\pi}{2}$.

Beispiel. Man bestimme $\int\limits_C 2(x+y)dx + (x^2+y^2)dy$. Dabei besteht C aus den beiden Teilkurven $C_1: \ y = -\sqrt{2x - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$ und $C_2 \ : \ y = \frac{1}{2}\sin(\pi x)$, $0 \leq x \leq 2$, und werde entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Nach dem Satz von Green-Riemann ist

$\int\limits_C P dx + Q dy = \iint\limits_B (Q_x - P_y) dx dy$.

Also ist $\int\limits_C 2(x+y)dx + (x^2+y^2)dy = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{1/2 \sin \pi x} (2x - 2) dy dx =$

$= \ \ldots \ = -\frac{2}{\pi}$.

Beispiel. Man bestimme $\int\limits_C (x - yz)dx + (1 + z^2)dy - 2xy dz$.

Dabei ist C die Schnittkurve der beiden Flächen $2x^2 + y^2 = 1 + z^2$ und $z = x$.

Nach dem Satz von Stokes ist $\int\limits_C \vec{v} \ d\vec{x} = \iint\limits_B (\mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}) \ dF$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x - yz \\ 1 + z^2 \\ -2xy \end{pmatrix} \;,\; \mathrm{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} -2x - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \;.$$

Für den (nach außen gerichteten) Normalenvektor kann **eine** der beiden Flächen gewählt werden, hier sinnvollerweise $z = x$ (mit der natürlichen Parametrisierung $u = x$, $v = y$) .

$$\Rightarrow \; \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;,\; \mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{n} = -2x - 3z \;.$$

Die Projektion der Schnittkurve der Flächen in die xy-Ebene ist $2x^2+y^2 = 1 + x^2$ (Gleichsetzung der z-Koordinaten) , bzw. $x^2 + y^2 = 1$.

Somit ist $\iint\limits_{B} (\mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}) \; dF = \iint\limits_{\overline{B}} (-2x - 3z(x,y)) \; dxdy = \iint\limits_{\overline{B}} (-5x) \; dxdy$, wobei $\overline{B} : \; x^2 + y^2 \leq 1$.

Damit folgt $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} (-5x) dxdy = 0$.