Wegunabhängigkeit von Linienintegralen

Von früher ist bekannt: Ist $\vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld, dann ist $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$ wegunabhängig.

Es gilt auch die Umkehrung:

Satz. Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf der zusammenhängenden Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$ wegunabhängig $\forall\ C \subseteq G$.

Dann ist $\vec{v}$ ein Gradientenfeld, d.h. $\exists\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$f(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_a^x \vec{v} \cdot d\vec{s}$, $x \in G$, $a \in G$ beliebig (und fest gewählt) ,
und f ist stetig differenzierbar auf G mit $\operatorname{grad} f = \vec{v}$, $\forall\ x \in G$.

Damit stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist (Integrabilitätsbedingung).

Satz. (Notwendige Bedingung)

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ ein stetig differenzierbares Gradientenfeld

auf der offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dann gilt $\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Im Falle $n = 3$ ist dies gleichbedeutend mit $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$.

Beweis. Sei $\vec{v} = \operatorname{grad} f$. Dann gilt
$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ und $\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ (Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Ableitungen). $\square$

Definition. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn es einen

Punkt $x_0 \in X$ (Sternmittelpunkt) gibt, sodass für alle $x \in X$ die Verbindungsstrecke von x_0 und x ganz in X gibt.

Satz. Das Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ sei auf der offenen

und sternförmigen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$\vec{v}$ ist ein Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Die Stammfunktion f kann etwa aus der Gleichung $\vec{v} = \text{grad} f$ durch Integration gewonnen werden.

$v_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\ldots$, $v_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Integration der ersten Gleichung nach x_1 liefert

$f = \int v_1(x_1, \ldots, x_n) dx_1 + \varphi_1(x_2, \ldots, x_n)$.

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert dann

$v_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int v_1(x_1, \ldots, x_n) dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x_2, \ldots, x_n)$ bzw.

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x_2, \ldots, x_n) = v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \int v_1(x_1, \ldots, x_n) dx_1$.

Eine weitere unbestimmte Integration liefert dann φ_1 etc.

Beispiel. Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} e^y \\ xe^y + z \\ 2z + y \end{pmatrix}$.

Da die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, existiert eine Stammfunktion f mit $\vec{v} = \text{grad} f$.

Also ist $v_1 = e^y = \frac{\partial f}{\partial x}$. Integration nach x ergibt $f = xe^y + \varphi_1(y, z)$.

$v_2 = xe^y + z = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad xe^y + z = xe^y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = z$

Daraus folgt durch Integration $\varphi_1(y, z) = yz + \varphi_2(z)$ und folglich ist

$f = xe^y + yz + \varphi_2(z)$.

Aus $v_3 = 2z + y = \frac{\partial f}{\partial z}$ folgt schließlich $2z + y = y + \varphi_2'$,
i.e. $2z = \varphi_2'$ und $\varphi_2(z) = z^2 + C$.

Damit erhalten wir für die Stammfunktion

$f(x, y, z) = xe^y + yz + z^2 + C$.

Bemerkung. Wegen $f(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_a^x \vec{v} \cdot d\vec{s}$ läßt sich die Stammfunktion auch durch Integration längs eines speziellen Weges berechnen.

Sei $a = (0, 0, 0)$ und der Weg C von $(0, 0, 0)$ nach (x, y, z) sei $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, wobei C_1 von $(0, 0, 0)$ nach $(x, 0, 0)$ verläuft (z.B. eine Gerade), C_2 von $(x, 0, 0)$ nach $(x, y, 0)$, und C_3 von $(x, y, 0)$ nach (x, y, z) .

Somit $C_1 : \ t \mapsto (tx, 0, 0,)$, $0 \leq t \leq 1$,

$C_2 : \ t \mapsto (x, ty, 0,)$, $0 \leq t \leq 1$, $C_3 : \ t \mapsto (x, y, tz,)$, $0 \leq t \leq 1$.

Folglich $f(x, y, z) = \int\limits_0^1 x dt + \int\limits_0^1 xe^{yt} y dt + \int\limits_0^1 (2zt + y) z dt =$

$= xt\big|_0^1 + xe^{yt}\big|_0^1 + z^2t^2\big|_0^1 + yzt\big|_0^1 = \ldots = xe^y + yz + z^2$.