Vektorpotentiale

Für den Nabla-Operator ∇ lassen sich folgende Rechenregeln einfach herleiten.

Satz. Seien f , $\vec{v}$, $\vec{w}$ geeignet oft differenzierbare Skalar- bzw. Vektorfunktionen. Dann gelten folgende Identitäten :

1. $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad} f \equiv 0$
2. $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\vec{v} \equiv 0$
3. $\mathrm{div}\ (f\vec{v}) \equiv (\vec{v}, \mathrm{grad} f) + f\mathrm{div}\vec{v}$
4. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{v}) \equiv \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\vec{v} - \triangle\vec{v}$
5. $\mathrm{div}\ (\vec{v} \times \vec{w}) \equiv (\vec{w}, \mathrm{rot}\vec{v}) - (\vec{v}, \mathrm{rot}\vec{w})$
6. $\mathrm{rot}(f\vec{v}) \equiv \mathrm{grad} f \times \vec{v} + f\mathrm{rot}\vec{v}$
7. $\mathrm{rot}(\vec{v} \times \vec{w}) \equiv \vec{v}\mathrm{div}\vec{w} - \vec{w}\mathrm{div}\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dx}\vec{w} - \frac{d\vec{w}}{dx}\vec{v}$

Definition. Ein auf $G \subseteq \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{A}$ heißt **Vektorpotential** des Vektorfeldes $\vec{v}$, wenn $\vec{v} = \mathrm{rot}\vec{A}$ in G gilt.

Ob und unter welchen Voraussetzungen ein gegebenes Vektorfeld ein Vektorpotential besitzt, beantwortet der folgende

Satz. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Sterngebiet (mit Sternmittelpunkt x_0) und sei $\vec{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G .

Gilt $\mathrm{div}\vec{v} = 0$ auf G , dann existiert ein Vektorpotential $\vec{A}$ zu $\vec{v}$, welches durch

$$\vec{A} = \int_0^1 t\vec{v}(x_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0) \times (\vec{x} - \vec{x}_0)dt$$

gegeben ist. Jedes weitere Vektorpotential unterscheidet sich von diesem nur durch ein Gradientenfeld.

Bei einem gegebenen Vektorfeld $\vec{v}$ können Quellen und Wirbel durch $\text{div}\vec{v}$ bzw. $\text{rot}\vec{v}$ bestimmt werden.

Seien nun umgekehrt eine Skalarfunktion $f(x,y,z)$ und eine Vektorfunktion $\vec{w}(x,y,z)$ gegeben. Existiert dann eine Vektorfunktion $\vec{v}(x,y,z)$, für die gilt

$$\text{div}\vec{v} = f \quad \text{und} \quad \text{rot}\vec{v} = \vec{w} \quad ?$$

D.h., ist eine Vektorfunktion $\vec{v}$ durch die Vorgabe ihrer Quellen und Wirbel bestimmbar ?

Sicherlich muß notwendigerweise $\text{div}\,\vec{w} = \text{div rot}\vec{v} \equiv 0$ gelten.

Wir zerlegen die gesuchte Vektorfunktion $\vec{v}$ in zwei Anteile $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, von denen gefordert wird

$$\text{div}\vec{v}_1 = f \ , \ \text{rot}\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \text{und} \quad \text{div}\vec{v}_2 = 0 \ , \ \text{rot}\vec{v}_2 = \vec{w} \ ,$$

d.h. $\vec{v}_1$ ist ein reines Quellenfeld mit der geforderten Quellstärke, und $\vec{v}_2$ ist ein reines Wirbelfeld mit der geforderten Wirbelstärke.

Wegen $\text{rot}\vec{v}_1 = \vec{0}$ ist $\vec{v}_1$ ein Gradientenfeld. Also existiert ein Potential $\varphi(x,y,z)$ mit $\vec{v}_1 = \text{grad}\varphi$.

φ genügt dann wegen $\text{div}\vec{v}_1 = f$ der **Poisson-Gleichung** $\triangle\varphi = f$.

Bemerkung. Jede Lösung der Poisson-Gleichung ist bis auf eine "harmonische Funktion" $h(x,y,z)$ (für die $\triangle h = 0$ gilt), bestimmt.

Wegen $\text{div}\vec{v}_2 = 0$ und $\text{div}\vec{w} = 0$ existiert ein Vektorpotential $\vec{A}$ mit $\vec{v}_2 = \text{rot}\vec{A}$.

$\Rightarrow \ \vec{w} = \text{rot}\vec{v}_2 = \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad div}\vec{A} - \triangle\vec{A}$.

Man kann nun zeigen, dass $\text{div}\vec{A}$ beliebig (z.B. Null) gewählt werden kann, ohne dass sich an $\vec{v}_2 = \text{rot}\vec{A}$ etwas ändert.

Mit $\text{div}\vec{A} = 0$ ist dann $\triangle\vec{A} = -\vec{w}$, i.e. $\triangle A_i = -w_i$ für $i = 1,2,3$.

Analog zu vorher ist dann jede Komponente A_i von $\vec{A}$ bis auf eine harmonische Funktion durch w_i bestimmt.

Zusammenfassung. Jedes Vektorfeld läßt sich bis auf harmonische Funktionen für das skalare Potentialfeld φ bzw. die Komponenten des Vektorfeldes $\vec{A}$ aus seinen Quellen und Wirbeln berechnen.