Grundsätzliches zu Differenzialgleichungen

Eine **Differenzialgleichung** ist eine Gleichung, in der unabhängige Variable, Funktionen (dieser Variablen) und Ableitungen dieser Funktionen vorkommen.

Gesucht werden dabei jene Funktionen, welche die Differenzialgleichung erfüllen (**Lösungen** der Differenzialgleichung).

Bei **gewöhnlichen** Differenzialgleichungen geht es um Funktionen **einer** Veränderlichen.

Bei **partiellen** Differenzialgleichungen geht es um Funktionen **mehrerer** Veränderlicher.

Beispiel. $y' + 2xy = 0$

ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung. Gesucht wird eine auf einem Intervall I definierte Funktion $y(x)$, sodass $\forall\ x \in I$ gilt

$$y'(x) + 2xy(x) = 0\ .$$

Man überprüft sofort, dass etwa $\varphi(x) = e^{-x^2}$ eine Lösung ist, welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Wir werden später sehen, dass **alle** Lösungen dieser Differenzialgleichung durch

$$y(x) = Ce^{-x^2}\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

gegeben sind, diese Differenzialgleichung also unendlich viele Lösungen besitzt.

Beispiel. $u_{xx} - u_{yy} = 0$

ist eine partielle Differenzialgleichung. Gesucht wird eine auf einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ definierte Funktion $u(x,y)$, sodass $\forall\ (x,y) \in B$ gilt

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0 \ .$$

Hier wäre etwa $u(x,y) = \sin x \sin y$ eine Lösung.

Die allgemeine Form einer gewöhnlichen Differenzialgleichung ist durch

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

gegeben. Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung wird als **Ordnung** der Differenzialgleichung bezeichnet.

(Wir hatten also zuvor eine gewöhnliche Differenzialgleichung 1. Ordnung und eine partielle Differenzialgleichung 2. Ordnung)

Bemerkungen.

(a) Statt "Lösung" spricht man auch vom "Integral der Differenzialgleichung", in gewissen Zusammenhängen auch von "Lösungskurve" bzw. "Integralkurve".

(b) Grundsätzlich erhält man als Lösungen einer gewöhnlichen Differenzialgleichung n-ter Ordnung eine n-parametrige Kurvenschar
$y = y(x; C_1, \ldots, C_n)$.

Durch spezielle Wahl der Parameter erhält man dann spezielle Lösungen.

Beispiel. (Freier Fall)

Ein festgehaltener Körper wird plötzlich losgelassen und bewegt sich unter Einfluß der Schwerkraft nach unten.

$s = s(t)$ sei der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt t .

Dann ist $v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t , und

$b(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$ die Beschleunigung zum Zeitpunkt t .

Ein physikalisches Gesetz besagt nun, dass $\ddot{s} = g$ ist, wobei g die (konstante) Erdbeschleunigung bezeichnet.

Aus $\ddot{s} = \dot{v} = g$ folgt nun durch elementare Integration, dass

$v(t) = \int g dt = gt + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ ist.

Aus $\dot{s} = v$ folgt durch weitere elementare Integration, dass

$s(t) = \int (gt + C_1) dt = g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ist.

Legen wir nun fest, dass zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ gelten soll, dass $s(0) = 0$ und $\dot{s}(0) = 0$ ist. Dann folgt daraus (durch Einsetzen), dass $C_1 = C_2 = 0$ ist und somit erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung

$s(t) = g\frac{t^2}{2}$.

Weitere Bemerkungen. Wichtige Fragestellungen bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen sind

(a) Wie kann man **alle** Lösungen bestimmen ?

(b) Gibt es eine Lösung, welche durch einen vorgegebenen Punkt geht ?

Welche Bedingungen sind zu stellen, damit eine derartige Lösung eindeutig bestimmt ist ? ($\rightarrow$ **Anfangswertproblem** , **AWP**)

(siehe Beispiel vorher: Differenzialgleichung $\ddot{s} = g$ und zwei sogenannte Anfangsbedingungen $s(0) = \dot{s}(0) = 0$ ergaben eine eindeutig bestimmte Lösung)

(c) Gibt es eine Lösung, welche durch zwei Randpunkte eines Intervalls geht ? ($\rightarrow$ **Randwertproblem** , **RWP**)

Betrachten wir etwa die Differenzialgleichung $y'' + y = 0$.

Wie wir später sehen, ist die Lösungsgesamtheit durch

$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Wir fragen, ob es eine Lösung mit der Eigenschaft $y(0) = 0$ und $y(\pi) = 1$ gibt.

$0 = y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

$1 = y(\pi) = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$

Hier zeigt sich, dass das betrachtete Randwertproblem **nicht** lösbar ist.