Elementar integrierbare Fälle

Wir betrachten eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung der Form

$$y' = f(x, y) \ ,$$

wobei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem Bereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ erklärt sei.

Gesucht ist dabei eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, sodass

$$\forall \ x \in I \quad : \quad (x, y(x)) \in D \quad \text{und} \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

Eine derartige Funktion heißt **Lösung** der Differenzialgleichung.

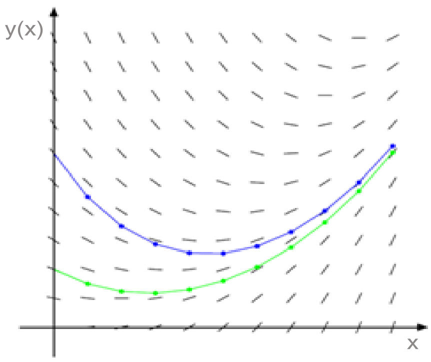
Betrachten wir nun einen Punkt $(x_0, y_0) \in D$. Dann gibt $f(x_0, y_0)$ offenbar die **Steigung** der Lösungskurve(n) an der Stelle x_0 an (weil $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$).

Diese Betrachtungsweise führt zu den Begriffen "Linienelement" und "Richtungsfeld".

Definition. Ein Tripel (x, y, p) , wobei p die Steigung einer durch $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gehenden Geraden bezeichnet, nennt man **Linienelement** .

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, liefert also für jeden Punkt $(x, y) \in D$ ein Linienelement $(x, y, f(x, y))$.

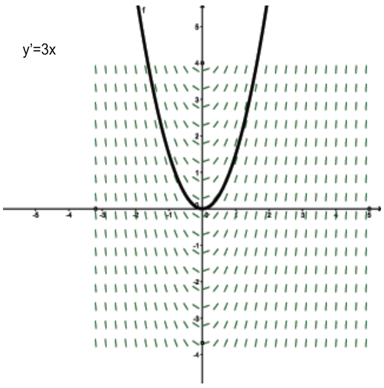
Die Gesamtheit aller Linienelemente heißt (das durch f definierte) **Richtungsfeld** .



Bemerkung. Das Richtungsfeld gibt also die Tangentenrichtungen der Lösungskurven an. Man erhält dadurch einen gewissen Überblick über den Verlauf der Lösungskurven.

1) $y' = f(x)$

f sei stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, also $D = I \times \mathbb{R}$. Wir beobachten, dass in diesem Fall das Richtungsfeld nur von x abhängt.



Ist $F(x)$ eine spezielle Stammfunktion von $f(x)$ dann ist $y(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ die Lösungsgesamtheit der Differenzialgleichung.

$$y' = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Beispiel. $y' = x^3 + \cos x$

Die allgemeine Lösung ist $y(x;C) = \frac{x^4}{4} + \sin x + C$.

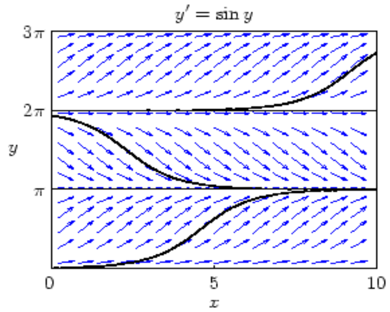
Fragen wir nach einer Lösung, welche durch den Punkt $(1,1)$ geht, also $y(1) = 1$, dann ergibt Einsetzen

$$1 = y(1) = \tfrac{1}{4} + \sin 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = \tfrac{3}{4} - \sin 1 \text{ , also}$$

$$y(x) = \tfrac{x^4}{4} + \sin x + \tfrac{3}{4} - \sin 1 \text{ .}$$

2) $y' = g(y)$

g sei stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, also $D = \mathbb{R} \times I$. Wir beobachten, dass in diesem Fall das Richtungsfeld nur von y abhängt.



Ist $g(y_0) = 0$, dann ist offenbar $y(x) = y_0 \ldots$ const. eine Lösung, d.h. es können eventuell konstante Lösungen vorkommen.

Nun betrachten jene Bereiche, wo $g(y) \neq 0$.

Ist $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$, dann ist

$$G(y) = x + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

Differenzieren nach x liefert nämlich

$$G'(y)y' = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}y' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y' = g(y) \; .$$

Bemerkung. Ist $y(x)$ eine Lösung, dann auch $z(x) = y(x+K)$ für jedes feste $K \in \mathbb{R}$, weil

$$z'(x) = y'(x+K) = g(y(x+K)) = g(z) \; .$$

Bemerkung. Für die praktische Berechnung ist folgende Schreibweise nützlich

$$y' = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = x + C$$

Beispiel. $y' = -2y$

Hier ist $g(y) = -2y$ und die Nullstellen von $g(y)$ bilden die konstanten Lösungen. In unserem Fall also $y = 0 \ldots$ const.

Für $y \neq 0$ erhalten wir

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -2x + K_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^{K_1 - 2x} = e^{K_1} e^{-2x} = K_2 e^{-2x} \quad \text{mit} \quad K_2 > 0$$

Folglich ist $\quad y = Ce^{-2x} \quad$ mit $\; C \neq 0$.

Weil auch $\; y = 0 \;$ Lösung ist, kann man die Gesamtheit aller Lösungen in der Form

$$y(x) = Ce^{-2x} \quad , \; C \in \mathbb{R} \quad \text{schreiben.}$$

Beispiel. $\quad y' = \sqrt{|y|}$

$y = 0 \ldots$ const. ist offenbar Lösung.

Ist $\; y(x) \;$ eine Lösung, dann auch $\; z(x) = -y(-x)$, weil

$$z'(x) = y'(-x) = \sqrt{|y(-x)|} = \sqrt{|z(x)|} \; .$$

Es genügt also, positive Lösungen $\; y > 0 \;$ zu betrachten.

In diesem Fall ist $\quad x + C = \int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} \quad$ für $\; x + C > 0$!

Damit sind alle positiven Lösungen durch

$$y(x) = \frac{(x+C)^2}{4} \quad , \; x > -C \quad \text{gegeben.}$$

Die negativen Lösungen sind durch

$$z(x) = -y(-x) = -\frac{(C-x)^2}{4} \quad , \; -x > -C \;\; \text{bzw.} \;\; x < C \;\; \text{gegeben.}$$

Damit lassen sich Lösungen angeben, die auf ganz $\; \mathbb{R} \;$ definiert sind, wie etwa

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{falls } \; x > 0 \\ 0 & \text{falls } \; -2 \le x \le 0 \\ -\frac{(x+2)^2}{4} & \text{falls } \; x < -2 \end{cases}$$

Betrachten wir einen Punkt $\; (\xi, 0) \;$ auf der $\; x$-Achse. Dann gibt es mehrere **verschiedene** Lösungen durch diesen Punkt, wie etwa

$$\varphi(x) = 0 \ldots \text{const.}, \quad \text{und}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{(x-\xi)^2}{4} & \text{falls } x > \xi \\ 0 & \text{falls } x \leq \xi \end{cases}$$

D.h. das zugehörige Anfangswertproblem ist **nicht** eindeutig lösbar !

3) $y' = f(x)g(y)$ (**Dgl. mit getrennten Variablen**)

Wiederum beobachten wir, dass die Nullstellen von $g(y)$ konstante Lösungen liefern,

$$g(y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = y_0 \ldots \text{ const. ist Lösung.}$$

Im Falle $g(y) \neq 0$ sei $G(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$ und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist dann

$$G(y) = F(x) + C \quad , \ C \in \mathbb{R} \ .$$

Differenzieren nach x liefert nämlich

$$G'(y)y' = F'(x) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{g(y)}y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f(x)g(y) \ .$$

Bemerkung. In der praktischen Berechnung ist wiederum folgende Schreibweise hilfreich

$$y' = \tfrac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \tfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad G(y) = F(x) + C$$

Bemerkung. Im allgemeinen ist zu erwarten, dass wir lediglich eine implizite Darstellung für die Lösungskurven erhalten.

Bemerkung. Haben wir ein AWP $y' = f(x)g(y)$, $y(\xi) = \eta$ gegeben, dann kann man zeigen, dass für stetiges $g(y)$ und $g(\eta) \neq 0$ das AWP (lokal) eindeutig lösbar ist.

Im Fall $g(\eta) = 0$ ist eine hinreichende Bedingung für die (lokale) eindeutige Lösbarkeit des AWP die, dass $g(y)$ stetig ist und in η eine isolierte Nullstelle besitzt und dass $g'(\eta) \neq 0$ ist.

Beispiel. $y' = e^y \sin x$

Beachte, dass $g(y) = e^y \neq 0 \quad \forall\, y$ ist.

$\int \frac{dy}{e^y} = \int \sin x dx \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = -\cos x - C \quad$ bzw. $\quad e^{-y} = \cos x + C$

Dies ist erklärt für $\cos x + C > 0$!

Wir haben also $y = -\ln(\cos x + C)$, $\cos x + C > 0$.

Für $C > 1$ ist $\cos x + C > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Dann ist $y(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und zudem beschränkt.

($\exists\, M > 0$ mit $\cos x + C \geq M \quad \Rightarrow \quad e^{-y} \geq M \quad \Rightarrow \quad e^y \leq \frac{1}{M}$)

Hingegen tritt im Falle $-1 < C \leq 1$ ein starkes Wachstum der Lösungen auf !

Liegt darüberhinaus eine Anfangsbedingung $y(0) = \eta$ vor, dann erhalten wir

$$e^{-\eta} = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = e^{-\eta} - 1 \quad \text{und damit}$$

$$e^{-y} = \cos x + e^{-\eta} - 1 \quad \text{bzw.} \quad y = -\ln(\cos x + e^{-\eta} - 1) \; .$$

4) **Lösung mittels geeigneter Substitution**

In manchen Fällen kann eine Differenzialgleichung durch eine geeignete Substitution vereinfacht werden bzw. auf einen bekannten Typ zurückgeführt werden. Für diese Vorgangsweise läßt sich kein Rezept angeben, sie hängt von der Art der vorliegenden Gleichung ab.

Beispiel. $y' = x^2 + y^2 - 2xy$

Wir beobachten, dass $y' = x^2 + y^2 - 2xy = (y - x)^2$.

Setzen wir $z(x) = y(x) - x$, folgt $z' = y' - 1$, bzw. $y' = z' + 1$.

Wir erhalten $z' + 1 = z^2$ und dies ist eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen, welche gemäß vorher gelöst werden kann.

Beispiel. (**Homogene** Differenzialgleichung)

Eine Dgl der Form $y' = g(\frac{y}{x})$ heißt auch homogene Differenzialgleichung.

Setzen wir hier $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ bzw. $y(x) = xz(x)$, erhalten wir

$z + xz' = g(z)$, also $z' = \frac{g(z)-z}{x}$,

was wiederum eine Dgl mit getrennten Variablen ist.

Betrachte etwa $y' = \frac{x^3+y^3}{3xy^2}$.

Dividieren wir Zähler und Nenner durch x^3 , erhalten wir

$y' = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Mit $z = \frac{y}{x}$ folgt dann

$z + xz' = \frac{1+z^3}{3z^2}$ bzw. $z' = \frac{\frac{1+z^3}{3z^2}-z}{x}$ etc.