Lineare Differenzialgleichung und verwandte Fälle

1. Die lineare Differenzialgleichung

Eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung besitzt die Form

$y' + g(x)y = h(x)$, wobei $g(x)$ und $h(x)$ stetig sind.

Gilt $h(x) \equiv 0$, heißt die Differenzialgleichung **homogen** , ansonsten **inhomogen**.

Bemerkung.
Die obige Differenzialgleichung wird oft in der "**Operatorschreibweise**" $Ly = h$ angegeben, wobei L ein Operator ist, der einer differenzierbaren Funktion $y(x)$ die Funktion $y' + g(x)y$ zuordnet.

Man beachte dabei, dass L ein **linearer** Operator ist, i.e.

$$L(\alpha y + \beta z) = \alpha Ly + \beta Lz \ .$$

Wir betrachten als erstes den Fall der **homogenen** Differenzialgleichung, d.h.

$$y' + g(x)y = 0 \ .$$

Wir erhalten $y' = -g(x)y$. Dies ist eine Dgl. mit getrennten Variablen.

Folglich ist $y = 0$ eine Lösung. Für $y \neq 0$ gilt

$$\frac{dy}{y} = -g(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\int g(x)dx + K$$

Setzen wir $G(x) = \int g(x)dx$, erhalten wir

$$|y| = e^K e^{-G(x)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ce^{-G(x)} \quad \text{mit} \ \ C \neq 0 \ .$$

Mit $y = 0$ erhalten wir damit als **allgemeine Lösung**

$$y(x) = Ce^{-G(x)} \ \ , \ C \in \mathbb{R} \ .$$

Bemerkung. Ist darüberhinaus eine Anfangsbedingung $y(\xi) = \eta$ gegeben, dann kann C eindeutig aus $\eta = Ce^{-G(\xi)}$ bestimmt werden.

Nun zur **inhomogenen** Differenzialgleichung $y' + g(x)y = h(x)$.

Beobachtung. Seien $y_1(x), y_2(x)$ zwei Lösungen der inhomogenen Differenzialgleichung und sei $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$.

Dann ist $z' + g(x)z = h(x) - h(x) = 0$ und damit ist $z(x)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung !

Wir erhalten $y_1(x) = z(x) + y_2(x)$ und dies bedeutet :

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung kann in der Form

$$y(x) = z(x) + y_p(x)$$

angegeben werden, wobei $z(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung bezeichnet und $y_p(x)$ eine spezielle oder **partikuläre** Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung.

Damit stellt sich die Frage, wie man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung finden kann.

1. **Ansatz** (und nachfolgendem Koeffizientenvergleich)

Beispiel. $y' - y = x^2$

Hier ist $h(x) = x^2$ ein Polynom 2. Grades, wir können also den Ansatz

$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$ versuchen.

$y_p'(x) = 2Ax + B$, eingesetzt in die Differenzialgleichung erhalten wir

$$2Ax + B - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 \quad \text{bzw.}$$

$$-Ax^2 + (2A - B)x + (B - C) = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$-A = 1 \ , \quad 2A - B = 0 \ , \quad B - C = 0 \quad \text{und damit}$$

$$A = -1 \ , \quad B = -2 \ , \quad C = -2$$

Also ist $y_p(x) = -x^2 - 2x - 2$.

2. "**Variation der Konstanten**"

Sei $y(x) = Ce^{-G(x)}$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung. Dann betrachten wir den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)e^{-G(x)}$$

und setzen diesen in die inhomogene Differenzialgleichung ein.

Mit $y_p' = C'e^{-G} - CG'e^{-G} = C'e^{-G} - Cge^{-G}$ gilt dann

$$C'(x)e^{-G(x)} - C(x)g(x)e^{-G(x)} + g(x)C(x)e^{-G(x)} = h(x) \quad \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-G(x)} = h(x) \quad \text{bzw.} \quad C'(x) = h(x)e^{G(x)} \quad \Rightarrow$$

$$C(x) = \int h(x)e^{G(x)}dx$$

Dadurch erhalten wir also eine spezielle Lösung $y_p(x)$.

Beispiel. $y' - y = x^2$

Die zugehörige homogene Differenzialgleichung ist $y' - y = 0$ mit der allgemeinen Lösung $y_H = Ce^x$.

Also treffen wir den Ansatz $y_p = C(x)e^x$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung erhalten wir

$$C'e^x + Ce^x - Ce^x = x^2 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = x^2e^{-x} \quad \Rightarrow$$

$$C(x) = \int x^2e^{-x}dx = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2)$$

Folglich ist $y_p(x) = C(x)e^x = -x^2 - 2x - 2$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist

$$y(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2 \ , \ C \in \mathbb{R} \ .$$

Ist die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ gegeben, erhalten wir

$$0 = Ce - 1 - 2 - 2 \ , \ \text{also} \ C = \tfrac{5}{e} \ ,$$

und daraus die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = \tfrac{5}{e}e^x - x^2 - 2x - 2 \ .$$

2. Bernoulli Differenzialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0 \quad , \ \alpha \in \mathbb{R} \ , \ \alpha \neq 1 \ , \ \alpha \neq 0$$

Diese Differenzialgleichung läßt sich durch die Substitution

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha} \qquad (\text{also} \ \ y^\alpha z = y)$$

auf eine lineare Differenzialgleichung für $z(x)$ zurückführen.

$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1-\alpha}y^\alpha z'$. Damit

$\frac{1}{1-\alpha}y^\alpha z' + g(x)y^\alpha z + h(x)y^\alpha = 0$. Multiplikation mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ liefert

$$z' + (1-\alpha)g(x)z = (\alpha - 1)h(x)$$

Dies ist eine lineare Differenzialgleichung für $z(x)$, aus deren Lösung sich $y(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ bestimmen läßt.

Bemerkungen.

(a) für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ ist y^α nur für $y > 0$ definiert (weil $y^\alpha = e^{\alpha \ln y}$) .

(b) Falls $\alpha \geq 0$, dann ist die Differenzialgleichung für $y \geq 0$ erklärt und $y = 0$ ist eine Lösung.

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{Z}$, α ungerade

Wenn $y(x)$ eine positive Lösung ist, dann ist $u(x) = -y(x)$ ebenfalls Lösung. Die Lösungsgesamtheit ist gegeben durch

$$y(x) = \overline{y}(x) \quad , \ \overline{y}(x) \ \text{ist positive Lösung}$$

$$y(x) = -\overline{y}(x)$$

$$(y(x) = 0 \quad \text{wenn} \ \ \alpha > 0)$$

(d) Sei $\alpha \in \mathbb{Z}$, α gerade

Ist $z(x)$ eine negative Lösung der linearen Dgl. für $z(x)$, dann ist

$y(x) = -(-z)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ eine negative Lösung. Die Lösungsgesamtheit ist

$$y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{falls} \quad z \geq 0$$
$$y(x) = -(-z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{falls} \quad z < 0$$
$$(y(x) = 0 \quad \text{wenn} \quad \alpha > 0)$$

Beispiel. Sei $y' + \frac{1}{1+x}y + (1+x)y^4 = 0$ gegeben.

Dies ist eine Bernoulli Dgl mit $\alpha = 4$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$, $h(x) = 1 + x$.

Die Substitution $z = y^{1-\alpha} = y^{-3}$ liefert

$$z' - \frac{3}{1+x}z = 3(1+x) \ .$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl ist

$$z_H = Ce^{-G(X)} \quad \text{mit} \quad G(x) = \int \frac{-3}{1+x}dx = -\ln(1+x)^3 \quad , \quad \text{also}$$
$$z_H(x) = C(1+x)^3 \ .$$

Variation der Konstanten liefert $z_p = -3(1+x)^2$ und damit ist

$$z(x) = C(1+x)^3 - 3(1+x)^2 = (1+x)^2(C(1+x) - 3) \ .$$

Folglich ist durch Rücksubstitution

$$y(x) = z(x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(C(1+x)-3)}} \quad \text{die allgemeine Lösung.}$$

Des weiteren ist hier auch $y = 0$ eine Lösung.

3. Riccati Differenzialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$$

Eine Riccati Dgl kann insbesondere dann gelöst werden, wenn eine spezielle Lösung $\varphi(x)$ bereits bekannt ist (durch Erraten, Ansatz o.ä.).

Treffen wir nämlich dann den Ansatz $u(x) = y(x) - \varphi(x)$, so erhalten wir durch Einsetzen

$$u' + (g(x) + 2h(x)\varphi(x))u + h(x)u^2 = 0 \ .$$

Dies ist nun eine Bernoulli Dgl für $u(x)$ mit $\alpha = 2$ und führt gemäß vorher mit der Substitution $z(x) = \frac{1}{u(x)}$ zur linearen Dgl

$$z' - (g(x) + 2h(x)\varphi(x))z = h(x) \ .$$

Dann ist $u(x) = \frac{1}{z(x)}$ und $y(x) = u(x) + \varphi(x)$.

Beispiel. $y' + 2xy + xy^2 = 3x$

Dies ist eine Riccati Dgl . Durch Einsetzen zeigt sich, dass $\varphi(x) = 1$ eine spezielle Lösung ist.

Die Substitution $u(x) = y(x) - 1$ liefert

$$u' + 4xu + xu^2 = 0 \ . \qquad \text{(Bernoulli Dgl)}$$

Die weitere Substitution $z(x) = \frac{1}{u(x)}$ $(u \neq 0$, also $y \neq 1)$ liefert

$$z' - 4xz = x \ . \qquad \text{(lineare Dgl)}$$

Diese besitzt die Lösung $z(x) = Ce^{2x^2} - \frac{1}{4}$.

Also ist $y(x) = \frac{1}{z(x)} + \varphi(x) = \frac{1}{Ce^{2x^2} - \frac{1}{4}} + 1$ und $y = 1$ ist eine weitere Lösung.