Exakte Differenzialgleichungen

In der nachfolgenden Diskussion benötigen wir die sog. **symmetrische Darstellung** einer Dgl 1. Ordnung. Diese lautet

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0 \ .$$

Dies entspricht im Falle $h(x,y) \neq 0$ der Dgl $y'(x) = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$, und im Falle $g(x,y) \neq 0$ der Dgl $x'(y) = -\frac{h(x,y)}{g(x,y)}$.

Beispiel. Die symmetrische Darstellung der Dgl $y' = -\frac{x}{y}$ ist

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad ydy = -xdx$ bzw. $xdx + ydy = 0$.

Definition. $g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$ heißt **exakt**, wenn eine stetig differenzierbare Funktion $F(x,y)$ existiert mit

$$F_x = g(x,y) \ \text{ und } \ F_y = h(x,y) \ .$$

$F(x,y)$ heißt dann eine **Stammfunktion** der Dgl.

Bemerkung. Im Falle der Exaktheit hat die Differenzialgleichung also die Form

$$F_x dx + F_y dy = dF = 0$$

wobei dF das totale Differenzial von F bezeichnet.

Beispiel. $2xydx + x^2dy = 0$ ist exakt, weil $F(x,y) = x^2y$ eine Stammfunktion ist.

Satz. Sei $gdx + hdy = 0$ exakt (wobei $g^2 + h^2 > 0$ und g, h stetig sind).

Die allgemeine Lösung der Dgl ist dann durch $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei $F(x,y)$ eine Stammfunktion ist.

Beweis. Sei $h(x_0, y_0) \neq 0$, i.e. $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Dann kann $F(x, y) - C = 0$ um (x_0, y_0) nach y aufgelöst werden, d.h. wir haben $F(x, y(x)) = C$.

Differenzieren nach x liefert $F_x + F_y \cdot y' = 0$ bzw.

$$g(x, y) + h(x, y) \cdot y' = 0 \quad \text{, also} \quad g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0 \ .$$

Ist umgekehrt $y(x)$ eine Lösung von $g(x, y) + h(x, y) \cdot y' = 0$, dann

$$F_x + F_y \cdot y' = 0 \quad \text{, i.e.} \quad \tfrac{d}{dx}(F(x, y(x))) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x, y(x)) = C \ .$$

Analog wird der Fall $g(x_0, y_0) \neq 0$, i.e. $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ behandelt. $\square$

Wie stellt man nun fest, ob eine vorgelegte Differenzialgleichung exakt ist, und wie kann man eine Stammfunktion bestimmen ?

Satz. Seien $g(x, y)$, $h(x, y)$ stetig differenzierbar auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0 \quad \text{ist exakt} \quad \Leftrightarrow \quad g_y = h_x$$

(**Integrabilitätsbedingung**)

Wie man dann eine Stammfunktion bestimmt, sei am folgenden Beispiel illustriert.

Beispiel. $(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy = 0$

$$g(x, y) = ye^{xy} + y^2 \quad \Rightarrow \quad g_y = e^{xy} + xye^{xy} + 2y$$

$$h(x, y) = xe^{xy} + 2xy \quad \Rightarrow \quad h_x = e^{xy} + xye^{xy} + 2y$$

Also ist die Dgl exakt, d.h. es existiert ein $F(x, y)$ mit $F_x = g$ und $F_y = h$.

Wir starten mit der Bedingung $F_x = g = ye^{xy} + y^2$.

Integration nach x liefert

$$F = \int F_x dx = e^{xy} + xy^2 + \varphi(y) \quad ,$$

wobei $\varphi(y)$ eine willkürliche Funktion von y bezeichnet.

Nun nutzen wir die zweite Bedingung $F_y = h$:

$$xe^{xy} + 2xy + \varphi'(y) = xe^{xy} + 2xy \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = C_1$$

Da wir nur eine Stammfunktion benötigen können wir $\varphi(y) = 0$ wählen und erhalten

$$F(x, y) = e^{xy} + xy^2 \ .$$

Also ist $F(x, y) = e^{xy} + xy^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$ Lösung der Dgl.

Bemerkung. Manchmal ist es vorteilhafter, mit der Bedingung $F_y = h$ zu beginnen. Dann ist

$$F = \int F_y dy = \int h(x, y) dy + \psi(x) \ .$$

$\psi(x)$ wird dann durch Einsetzen in die Bedingung $F_x = g$ bestimmt.

Betrachten wir nun die Dgl $ydx + 2xdy = 0$.

Hier ist $g(x, y) = y$, $g_y = 1$, $h(x, y) = 2x$, $h_x = 2$. Die Dgl ist also **nicht** exakt.

Multiplizieren wir die gegebene Dgl mit y , dann erhalten wir eine neue Dgl, nämlich

$$y^2dx + 2xydy = 0 \ .$$

Diese ist nun exakt mit der Lösung $F(x, y) = xy^2 = C$.

Definition. Eine stetig differenzierbare Funktion $M(x, y) \neq 0$ heißt **integrierender Faktor** (oder **Euler'scher Multiplikator**) der Dgl $gdx + hdy = 0$, wenn die Dgl

$$(Mg)dx + (Mh)dy = 0 \quad \text{exakt ist.}$$

Bemerkung. Die allgemeine Lösung von $gdx + hdy = 0$ stimmt mit der allgemeinen Lösung von $(Mg)dx + (Mh)dy = 0$ überein.

Bemerkung. Die Auswertung der Integrabilitätsbedingung für $(Mg)dx + (Mh)dy = 0$ liefert

$$(Mg)_y = (Mh)_x \quad \text{bzw.} \quad M_y g + M g_y = M_x h + M h_x$$

Dies ist eine partielle Differenzialgleichung für $M(x,y)$, welche i.a. recht schwierig zu lösen sein wird.

Aus diesem Grund fragt man sich, ob spezielle Euler'sche Multiplikatoren existieren.

Angenommen, $M = M(x)$ sei ein integrierender Faktor, M hängt also nur von x ab.

Dann ist $M_y = 0$ und $M g_y = M_x h + M h_x$ bzw.

$$\frac{g_y - h_x}{h} = \frac{M_x}{M} = (\ln M(x))' \quad \text{und} \quad \ln M(x) = \int \frac{g_y - h_x}{h} dx$$

Damit :

1) Ist $\frac{g_y - h_x}{h}$ nur eine Funktion von x dann ist

$M(x) = e^{\int \frac{g_y - h_x}{h} dx}$ ein integrierender Faktor.

2) Ist $\frac{h_x - g_y}{g}$ nur eine Funktion von y dann ist

$M(y) = e^{\int \frac{h_x - g_y}{g} dy}$ ein integrierender Faktor (wird analog gezeigt).

Übung. Man überlege sich, wann ein integrierender Faktor der Form $M(x,y) = M(xy)$ existiert, wo also M eine Funktion der Variablen $\xi = xy$ ist.

$M_x = M'(\xi)\xi_x = yM'(\xi)$, $M_y = M'(\xi)\xi_y = xM'(\xi) \quad \Rightarrow$

$xM'(\xi)g + M g_y = yM'(\xi)h + M h_x \quad \Rightarrow$

$(g_y - h_x)M = (yh - xg)M' \quad \Rightarrow \quad (\ln M(\xi))' = \frac{M'}{M} = \frac{g_y - h_x}{yh - xg}$ etc.

Beispiel. $(2x^2 y + 2xy^3 + y)dx + (3y^2 + x)dy = 0$

$g_y = 2x^2 + 6xy^2 + 1$, $h_x = 1$ Dgl nicht exakt !

$\frac{g_y - h_x}{h} = \frac{(2x^2 + 6xy^2 + 1) - 1}{3y^2 + x} = \frac{2x(x + 3y^2)}{3y^2 + x} = 2x$ ... nur Funktion von x

Damit ist $\ln M(x) = \int 2x dx = x^2$ und $M(x) = e^{x^2}$.

Die Dgl $(2x^2y + 2xy^3 + y)e^{x^2} dx + (3y^2 + x)e^{x^2} dy = 0$ ist dann exakt und hat eine Stammfunktion

$$F(x, y) = e^{x^2}(y^3 + xy) \ .$$

Also ist $e^{x^2}(y^3 + xy) = C$, $C \in \mathbb{R}$ die Lösung der Dgl.

Beispiel. $ydx + 2xdy = 0$

$g_y = 1$, $h_x = 2$ Dgl nicht exakt !

$\frac{h_x - g_y}{g} = \frac{1}{y}$ ... nur Funktion von y

Damit ist $M(y) = e^{\int \frac{h_x - g_y}{g} dy} = y$

Die Dgl $y^2dx + 2xydy = 0$ ist dann exakt, hat also eine Stammfunktion $F(x, y)$.

$F_x = y^2 \quad \Rightarrow \quad F = xy^2 + \varphi(y)$, $F_y = 2xy + \varphi'(y) = 2xy \quad \Rightarrow \quad \varphi' = 0$ bzw. $\varphi(y) = 0$. Also $F(x, y) = xy^2$.

Damit ist $xy^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$ die Lösung der Dgl.