Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Eine wichtige Aussage, die im Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes verwendet wird, ist der **Banachsche Fixpunktsatz**.

Sei B ein Banachraum (vollständiger normierter Raum) und $T : D \to B$ ein Operator, wobei $D \subseteq B$ und $T(D) \subseteq D$.

Ist der Operator T **kontrahierend**, d.h. existiert eine Konstante $q < 1$ mit

$$\|Tx - Ty\| \leq q\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in D$$

dann hat T genau einen Fixpunkt, d.h. $\overset{1}{\exists}\ \overline{x} \in D$ mit $T(\overline{x}) = \overline{x}$.

$\overline{x}$ ergibt sich als Grenzwert der Folge x_0 (beliebig) , $x_1 = T(x_0)$,

$x_2 = T(x_1)$, ... , $x_{n+1} = T(x_n)$, ...

(Verfahren der **sukzessiven Approximation**)

Wir betrachten nun ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(\xi) = \eta$.

Satz. (Picard-Lindelöf)

Ist f stetig auf $S \subseteq \mathbb{R}^2$ und genügt f einer sogenannten **Lipschitzbedingung bzgl.** y in einer Umgebung von (ξ, η) , i.e.

$$\exists\, L \geq 0 \text{ mit } |f(x, y) - f(x, \overline{y}| \leq L|y - \overline{y}|$$

dann ist das AWP **lokal eindeutig lösbar**, d.h. es gibt ein geeignetes offenes Intervall J um ξ und genau eine auf J definierte Funktion $y(x)$ mit $y' = f(x, y(x))$ und $y(\xi) = \eta$.

Bemerkung. Die Lipschitzbedingung bzgl. y ist insbesondere dann erfüllt, wenn f stetig partiell differenzierbar nach y ist.

Wir beobachten, dass das AWP $y' = f(x,y)$, $y(\xi) = \eta$ gleichbedeutend ist mit der Integralgleichung

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))dt \ .$$

Definieren wir nun einen Operator T der einer Funktion $y(x)$ die Funktion $(Ty)(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y(t))dt$ zuordnet, dann kann durch Wahl einer geeigneten Norm erreicht werden, dass T kontrahierend ist und somit genau einen Fixpunkt $\overline{y}(x)$ besitzt.

$\overline{y}(x)$ ist offenbar die eindeutig bestimmte Lösung des AWP.

Bemerkung. Durch weitere Überlegungen kann gezeigt werden, dass die eindeutig bestimmte Lösung des AWP einen maximalen Definitionsbereich besitzt.

Bemerkung. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz erhalten wir zudem auch ein Verfahren zur Bestimmung der Lösung

$$y_0(x) = \eta \ \ \ldots \ \ \text{const.}$$

$$y_{n+1}(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y_n(t))dt$$

Beispiel. $y' = y$, $y(0) = 1$ (hier also $f(x,y) = y$)

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_{0}^{x} f(t, y_0(t))dt = 1 + \int_{0}^{x} dt = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_{0}^{x} f(t, y_1(t))dt = 1 + \int_{0}^{x} (1+t)dt = 1 + x + \tfrac{x^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^k}{k!} \ \rightarrow \ \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{x^k}{k!} = e^x$$

Damit genau eine Lösung durch einen Punkt (ξ, η) geht, ist die Stetigkeit von f nicht ausreichend, wie auch an früheren Beispielen gesehen wurde (wie z.B. $y' = \sqrt{|y|}$) .

Allerdings gewährleistet die Stetigkeit von f dass zumindest eine Lösung durch (ξ, η) geht.

Satz. (Existenzsatz von **Peano**)

Sei $y' = f(x, y)$ gegeben und f stetig auf $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dann geht durch jeden Punkt $(\xi, \eta) \in D$ zumindest eine Lösung.