Lineare Systeme

Ein lineares System von Differenzialgleichungen hat die Form

$$y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t)$$

$$y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \ldots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t)$$

$$\ldots\ldots$$

$$y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t)$$

Beispiel.

$$y_1' = t^2 y_1 - \sin t y_2 + e^t y_3 + t^5$$

$$y_2' = -ty_1 + (t^3 + \cos t)y_2 - y_3$$

$$y_3' = y_1 + e^{-t}\cos t y_2 + (t^2 - t)y_3 - t - t^2$$

Bemerkung. Gilt $b_1(t) = b_2(t) = \ldots = b_n(t) = 0$, dann spricht man von einem **homogenen System**, sonst von einem **inhomogenen System**.

Bemerkung. In Matrizenschreibweise kann ein lineares System in der Form

$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ geschrieben werden, wobei

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \ldots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \ , \ \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Für obiges Beispiel wäre dann

$$A = \begin{pmatrix} t^2 & -\sin t & e^t \\ -t & t^3 + \cos t & -1 \\ 1 & e^{-t}\cos t & t^2 - t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t^5 \\ 0 \\ -t - t^2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Sind $A(t)$ und $\vec{b}(t)$ stetig (auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$) , dann sind die rechten Seiten stetig partiell differenzierbar nach den y_i und somit ist ein Anfangswerproblem

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b} \quad , \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

(lokal) eindeutig lösbar.

Wir kommen nun zur zentralen Aussage für lineare homogene Systeme.

Satz. Sei $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, wobei $A(t)$ eine stetige reellwertige $n \times n$ Matrix ist.

Dann ist die Lösungsgesamtheit des Systems ein n-dimensionaler Vektorraum (über $\mathbb{R}$) .

Um also alle Lösungen eines gegebenen Systems zu bestimmen, benötigen wir eine Basis dieses Vektorraums, also n linear unabhängige Lösungen. Jede weitere Lösung ist dann als Linearkombination dieser Basislösungen darstellbar.

Definition. Ein System von n linear unabhängigen Lösungen heißt ein **Hauptsystem** (HS) oder **Fundamentalsystem** (FS) von Lösungen.

Hat man n Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ von $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$ gegeben, so läßt sich daraus eine **Lösungsmatrix** $Y(t)$ bilden, wobei die i-te Spalte von $Y(t)$ der Vektor $\vec{y}_i(t)$ ist.

Direktes Ausrechnen liefert dann die Beziehung $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Hat man umgekehrt eine Matrix $Y(t)$ gegeben mit $Y'(t) = A(t)Y(t)$, dann bilden die Spalten von $Y(t)$ n Lösungen von $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$.

Es gilt :

$Y(t)$ liefert ein Fundamentalsystem $\Leftrightarrow$

$\forall\, t$ ist $Y(t)$ eine reguläre Matrix $\Leftrightarrow$

$\exists\, \tau$ sodass $Y(\tau)$ eine reguläre Matrix ist.

Ist $Y(t) = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ ein System von n Lösungen, dann heißt $\varphi(t) = \det Y(t)$ die **Wronsky-Determinante** des Lösungssystems.

Offenbar gilt:

$Y(t)$ bildet ein Fundamentalsystem $\Leftrightarrow$

$\exists\ \tau$ sodass $\varphi(\tau) \neq 0$

Bemerkung. Für stetiges $A(t)$ erfüllt die Wronsky-Determinante $\varphi(t)$ die Differenzialgleichung

$$\varphi'(t) = \mathrm{sp}A(t) \cdot \varphi \quad ,$$

wobei $\mathrm{sp}A(t) = a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$ die **Spur** von $A(t)$ ist.

Also ist

$$\varphi(t) = e^{\int \mathrm{sp}A(t)dt} \ .$$

Die Bestimmung der Lösungsgesamtheit eines allgemeinen linearen Systems ist in der Regel recht schwierig.

Das **Reduktionsverfahren von d'Alembert** ermöglicht es, die Anzahl der Gleichungen zu reduzieren, sofern eine spezielle Lösung bekannt ist.

Dies sei für den Fall $n = 2$ illustriert.

Gegeben sei

$$y_1{}' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2$$

$$y_2{}' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2$$

und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ sei eine spezielle Lösung mit $x_1(t) \neq 0$.

Wir treffen den Ansatz

$$\vec{y}(t) = \psi(t)\vec{x}(t) + \vec{z}(t)$$

wobei $\psi(t)$ eine Skalarfunktion ist und $\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \end{pmatrix}$.

Eingesetzt in die Differenzialgleichung erhalten wir

$$\psi'\vec{x} + \psi\vec{x}\,' + \vec{z}\,' = A \cdot (\psi(t)\vec{x}(t) + \vec{z}(t)) = \psi A\vec{x} + A\vec{z}$$

Weil $\psi\vec{x}\,' = \psi A\vec{x}$ gilt $\vec{z}\,' = A\vec{z} - \psi'\vec{x}$ bzw.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 - \psi' x_1 \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 - \psi' x_2 \end{pmatrix}$$

Die 1. Komponente liefert $\psi' = \frac{1}{x_1}a_{12}z_2$.

Die 2. Komponente liefert $z_2\,' = a_{22}z_2 - \psi' x_2$ bzw.

$$z_2\,' = (a_{22} - \tfrac{x_2}{x_1}a_{12})z_2$$

Daraus kann $z_2(t)$ und danach $\psi(t)$ bestimmt werden. Schlußendlich erhalten wir eine weitere zu $\vec{x}(t)$ linear unabhängige Lösung durch

$$\vec{y}(t) = \psi(t)\vec{x}(t) + \vec{z}(t) \ .$$

Beispiel.

$$y_1\,' = \tfrac{1}{t}y_1 - y_2$$
$$y_2\,' = \tfrac{1}{t^2}y_1 + \tfrac{2}{t}y_2$$

Hier ist $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$

Wir haben $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ als spezielle Lösung gegeben.

Dann ist $z_2\,' = (a_{22} - \frac{x_2}{x_1}a_{12})z_2 = \frac{1}{t}z_2 \quad\Rightarrow\quad z_2(t) = t$ und

$\psi' = \frac{1}{x_1}a_{12}z_2 = -\frac{1}{t} \quad\Rightarrow\quad \psi(t) = -\ln t$

Damit erhalten wir als weitere Lösung

$$\vec{y}(t) = \psi\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} = -\ln t \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t\ln t + t \end{pmatrix}$$

$\vec{x}(t)$ und $\vec{y}(t)$ bilden ein Fundamentalsystem.