

# Inhomogene Systeme

Ein inhomogenes lineares System hat die Form

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t) .$$

Wie im Fall  $n = 1$  erhalten wir die grundlegende Aussage betreffend die Lösungsgesamtheit  $\vec{y}(t)$  eines inhomogenen Systems, nämlich

$$\vec{y}(t) = \vec{x}(t) + \vec{z}(t)$$

wobei  $\vec{x}(t)$  die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems bezeichnet, und  $\vec{z}(t)$  **eine** spezielle Lösung des inhomogenen Systems.

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems kann wiederum mit dem Verfahren der **Variation der Konstanten** (zumindest prinzipiell) gefunden werden.

Sei  $Y(t) = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$  ein FS von  $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$ .

Dann kann die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung beschrieben werden durch

$$\vec{y} = Y\vec{v} = C_1\vec{y}_1 + \dots + C_n\vec{y}_n \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Wir treffen nun als Ansatz für die spezielle Lösung  $\vec{z}(t) = Y(t)\vec{v}(t)$ .

$$\vec{z}' = A\vec{z} + \vec{b} \Rightarrow Y'\vec{v} + Y\vec{v}' = AY\vec{v} + \vec{b} = Y'\vec{v} + \vec{b} \quad (\text{weil } AY = Y')$$

Damit ist  $Y\vec{v}' = \vec{b}$  bzw.  $\vec{v}' = Y^{-1}\vec{b}$  und

$$\vec{v}(t) = \int Y^{-1}(t)\vec{b}(t)dt .$$

**Beispiel.** Angenommen,  $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$  bilden ein FS von

$$\vec{y}' = A\vec{y} \quad \text{und es sei} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dann ist} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y^{-1}(t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}.$$

$$\text{Weiters ist} \quad Y^{-1}(t)\vec{b}(t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 3t \\ t^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Damit ist} \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \int \frac{3t}{t^2+1} dt \\ \int \frac{t^2-2}{t^2+1} dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \ln(t^2 + 1) \\ 1 - 3 \arctan t \end{pmatrix}$$

und als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir

$$\vec{z}(t) = Y(t)\vec{v}(t).$$