Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten ein homogenes System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$

wobei A eine **konstante reelle** $n \times n$ Matrix ist.

Setzen wir den Ansatz $\vec{y} = e^{\lambda t}\vec{c}$ ein, erhalten wir

$$\lambda e^{\lambda t}\vec{c} = Ae^{\lambda t}\vec{c} = e^{\lambda t}A\vec{c}\ .$$

Weil $e^{\lambda t} \neq 0$, gilt $\lambda\vec{c} = A\vec{c}$ bzw. $(A - \lambda E_n)\vec{c} = \vec{0}$.

Dies bedeutet: (siehe Lineare Algebra) Ist λ ein Eigenwert von A und $\vec{c}$ ein zugehöriger Eigenvektor, dann ist

$$\vec{y} = e^{\lambda t}\vec{c} \quad \text{eine Lösung von} \quad \vec{y}\,' = A\vec{y}\ .$$

Bemerkung. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also die Lösungen von $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0$.

Weiters ist bekannt dass $P_n(\lambda)$ n komplexe Nullstellen besitzt.

Bemerkung. Lösungen $\vec{y}_i(t) = e^{\lambda_i t}\vec{c}_i$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren $\vec{c}_i$ linear unabhängig sind.

Wir erhalten also insbesondere dann ein Fundamentalsystem, wenn es n linear unabhängige Eigenvektoren gibt, d.h. wenn die Matrix A **diagonalisierbar** ist.

Dies ist z.B. dann gegeben, wenn es n verschiedene Eigenwerte gibt. Im allgemeinen Fall bedeutet Diagonalisierbarkeit, dass die Vielfachheit jedes Eigenwertes mit der Dimension des zugehörigen Eigenraums übereinstimmt.

Ist die Matrix A nicht diagonalisierbar, ist es auch möglich, ein Fundamentalsystem zu gewinnen (unter Zuhilfenahme von Jordan-Matrizen).

Dies wird hier nicht weiter behandelt. Erwähnt sei lediglich :

Hat der Eigenwert λ die Vielfachheit r , dann gibt es r linear unabhängige Lösungen der Form

$$\vec{y} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

wobei die $p_i(t)$ Polynome vom Grad $\leq r-1$ sind.

Im allgemeinen können ein Eigenwert λ und ein zugehöriger Eigenvektor $\vec{c}$ komplex sein. Wir sind hier allerdings an reellen Lösungen interessiert.

Sei also $\lambda = \mu + i\nu$ $(\nu \neq 0)$ ein Eigenwert von A und $\vec{c} = \vec{a} + i\vec{b}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Weil die Matrix A reell ist, ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenvektor. Wir werden sehen, dass wir zum Paar $\lambda, \overline{\lambda}$ zwei reelle Lösungen erhalten (hat λ die Vielfachheit r , dann liefert $\lambda, \overline{\lambda}$ $2r$ reelle Lösungen).

Bemerkung. Ist $\vec{y} = \mathrm{Re}\vec{y} + i\mathrm{Im}\vec{y}$ eine Lösung, dann liefert Einsetzen in die Differenzialgleichung dass

$\mathrm{Re}\vec{y}$ und $\mathrm{Im}\vec{y}$ reelle Lösungen sind.

Damit : $\vec{y} = \vec{c}e^{\lambda t} = (\vec{a} + i\vec{b})e^{(\mu+i\nu)t} = (\vec{a} + i\vec{b})e^{\mu t}(\cos \nu t + i \sin \nu t) =$

$= e^{\mu t}(\vec{a} \cos \nu t - \vec{b} \sin \nu t) + ie^{\mu t}(\vec{a} \sin \nu t + \vec{b} \cos \nu t)$

Also ist $\mathrm{Re}\vec{y} = e^{\mu t}(\vec{a} \cos \nu t - \vec{b} \sin \nu t)$, $\mathrm{Im}\vec{y} = e^{\mu t}(\vec{a} \sin \nu t + \vec{b} \cos \nu t)$.

Beispiel. Ein System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_{2,3} = -3$.

Zu $\lambda = 2$ sei $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor.

Zu $\lambda = -3$ mögen 2 linear unabhängige Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ existieren.

Dann bilden $\vec{y}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_3 = e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

ein Fundamentalsystem (und jede Lösung ist als Linearkombination dieser Fundamentallösungen darstellbar).

Beispiel. Ein System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$.

Zu $\lambda = 1 + i$ sei $\begin{pmatrix} i \\ 3+i \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor.

Dann ist $e^{(1+i)t} = e^t(\cos t + i \sin t)$, $\begin{pmatrix} i \\ 3+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die reellen Lösungen sind damit

$$e^t(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ 3\cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$e^t(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ 3\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$