Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung

Diese haben die Form

$$Lu = u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b(t)$$

Dabei ist L ein sogenannter Differenzialoperator, der auf eine (geeignet oft differenzierbare) Funktion $u(t)$ wirkt. Hier ist L ein linearer Operator, d.h. $L(\lambda u + \mu v) = \lambda Lu + \mu Lv$.

Beispiel. $Lu = u''' - \cos t u'' + (t^2 + 1)u' - tu = e^t$

Mit der Setzung $y_1 = u$, $y_2 = y_1' = u'$, $\ldots$, $y_n = y_{n-1}' = u^{(n-1)}$ erhalten wir ein lineares System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(t) \quad \text{wobei}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Von der früheren Diskussion wissen wir

- Sind $a_i(t)$, $b(t)$ stetig auf einem Intervall I mit $\tau \in I$, dann ist das Anfangswertproblem

$$Lu = b \quad , \quad u^{(k)}(\tau) = \eta_k \ , \ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(lokal) eindeutig lösbar.

- Sind $a_i(t)$ stetige reellwertige Funktionen, dann ist der Lösungsraum der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.

- Ist $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, dann ist $\vec{y}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ u_i' \\ \vdots \\ u_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

Für die Wronsky-Determinante $W(t) = \det(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ gilt

$W' = \mathrm{Sp}A(t)W = -a_{n-1}(t)W$ und damit

$W(t) = e^{-\int a_{n-1}(t)dt}$

- Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung $Lu = b$ ist gegeben durch

$$u = w + z$$

wobei w die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $Lu = 0$ ist und z eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann mittels **Variation der Konstanten** gefunden werden (siehe vorher).

- Das Verfahren der Variation der Konstanten sei für den Fall $n = 2$ explizit angegeben. Wir betrachten also eine Differenzialgleichung

$$u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u = b(t)$$

Dann ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$

Sei $u_1(t)$, $u_2(t)$ ein FS der homogenen Gleichung. Dann ist

$$Y = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix}$$

Von vorher wissen wir, dass eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems gegeben ist durch

$$\vec{z}(t) = Y(t) \int Y^{-1}(t)\vec{b}(t)dt$$

Nun ist $Y^{-1}(t) = \frac{1}{\det Y(t)} \begin{pmatrix} u_2' & -u_2 \\ -u_1' & u_1 \end{pmatrix}$ und mit $\det Y(t) = W(t)$ gilt

$$Y^{-1}(t)\vec{b}(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} -u_2(t)b(t) \\ u_1(t)b(t) \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\vec{z}(t) = Y(t) \int Y^{-1}(t)\vec{b}(t)dt = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int \frac{-u_2(t)b(t)}{W(t)}dt \\ \int \frac{u_1(t)b(t)}{W(t)}dt \end{pmatrix}$

Auswertung der ersten Komponente liefert

$$z(t) = C_1(t)u_1(t) + C_2(t)u_2(t) \quad \text{mit}$$

$$C_1(t) = -\int \frac{u_2(t)b(t)}{W(t)}dt \quad \text{und} \quad C_2(t) = \int \frac{u_1(t)b(t)}{W(t)}dt \ .$$

Beispiel. $u'' - 3u' + 2u = e^t$

Ein FS von $u'' - 3u' + 2u = 0$ (siehe später) ist $u_1(t) = e^{2t}$, $u_2(t) = e^t$.

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^t \\ 2e^{2t} & e^t \end{vmatrix} = -e^{3t} \quad , \quad b(t) = e^t$$

$$C_1(t) = -\int \frac{u_2(t)b(t)}{W(t)}dt = -\int \frac{e^t e^t}{-e^{3t}}dt = \int e^{-t}dt = -e^{-t}$$

$$C_2(t) = \int \frac{u_1(t)b(t)}{W(t)}dt = \int \frac{e^{2t}e^t}{-e^{3t}}dt = -t$$

Somit ist $z(t) = C_1(t)u_1(t) + C_2(t)u_2(t) = -e^{-t}e^{2t} - te^t = -(1+t)e^t$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$u = C_1e^{2t} + C_2e^t - (1+t)e^t \quad , \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \square$$

Sei $Lu = b$ eine Differenzialgleichung n-ter Ordnung. Ist nun eine Lösung $v(t) \neq 0$ der homogenen Gleichung $Lu = 0$ bekannt, dann kann daraus eine Differenzialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung gewonnen werden.

Ist wiederum für die entstandene homogene Differenzialgleichung ein Fundamentalsystem bekannt, dann ergibt sich zusammen mit $v(t)$ ein FS für $Lu = 0$.

Dieses Verfahren heißt Verfahren der **Reduktion der Ordnung**.

Beispiel. $u'' - \cos t \cdot u' + \sin t \cdot u = t$

Durch Einsetzen stellt sich heraus, dass $v(t) = e^{\sin t}$ eine Lösung von $u'' - \cos t \cdot u' + \sin t \cdot u = 0$ ist.

Wir treffen nun den **Ansatz** : $u(t) = v(t)w(t) = e^{\sin t}w(t)$.

$u' = \cos t e^{\sin t} w + e^{\sin t} w'$

$u'' = (-\sin t + \cos^2 t)e^{\sin t} w + 2\cos t e^{\sin t} w' + e^{\sin t} w''$

Eingesetzt in die Differenzialgleichung erhalten wir

$$w'' + \cos t \cdot w' = t$$

Mit der Substitution $z(t) = w'(t)$ erhalten wir die lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$z' + \cos t \cdot z = t \ .$$

Für die Gleichung $z' + \cos t \cdot z = 0$ gilt $z(t) = e^{-\sin t}$.

$w' = z(t) \quad \Rightarrow \quad w = \int e^{-\sin t} dt$

Damit erhalten wir für $u'' - \cos t \cdot u' + \sin t \cdot u = 0$ ein Fundamentalsystem, nämlich

$$(e^{\sin t} \ , \ e^{\sin t} \int e^{-\sin t} dt) \ .$$