Potenzreihenansätze

Gegeben sei eine lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \ .$$

Wir fragen, ob es eine Lösung gibt, die in Form einer Potenzreihe dargestellt werden kann.

Wir behandeln hier den Fall, dass sogenannte **"reguläre Koeffizienten"** vorliegen, d.h. dass $p(x)$ und $q(x)$ in eine Potenzreihe um einen Entwicklungspunkt x_0 entwickelt werden können.

Bemerkung. Eine weitere Möglichkeit ist der Fall von "schwach singulären Koeffizienten", wo $p(x)$ und $q(x)$ eine Singularität in x_0 haben, aber $(x - x_0)p(x)$ und $(x - x_0)^2 q(x)$ analytisch in x_0 sind.

Dies ist etwa bei der **Bessel Differenzialgleichung**

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad , \ \nu \in \mathbb{R} \ , \ \nu \geq 0$$

der Fall. Hier funktioniert der "normale" Potenzreihenansatz nicht mehr und muss geeignet modifiziert werden.

Liegt der Fall regulärer Koeffizienten vor, dann kann man den Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

treffen. Dies führt (nach geeigneter Umnumerierung der Summationsindizes) zu einer Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n welche dann (oft) explizit bestimmt werden können.

Wir illustrieren diese Vorgangsweise an einem einfachen

Beispiel. $y'' - y = 0$

(Wir wissen hier natürlich, dass e^x und e^{-x} ein Fundamentalsystem bilden.)

Sei also $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ (hier ist $x_0 = 0$)

Dann ist

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Wir erhalten damit $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$.

Wegen $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ ist nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n\} x^n = 0$$

und folglich erhalten wir die Rekursionsformel

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n = 0 \quad \text{bzw.} \quad a_{n+2} = \tfrac{1}{(n+2)(n+1)} a_n \quad \text{für} \quad n \geq 0$$

Einsetzen liefert

$n = 0 \qquad a_2 = \frac{1}{2} a_0$

$n = 1 \qquad a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} a_1$

$n = 2 \qquad a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0 = \frac{1}{4!} a_0$

$n = 3 \qquad a_5 = \frac{1}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_1 = \frac{1}{5!} a_1$

$n = 4 \qquad a_6 = \frac{1}{6 \cdot 5} a_4 = \ldots = \frac{1}{6!} a_0$

$n = 5 \qquad a_7 = \frac{1}{7 \cdot 6} a_5 = \ldots = \frac{1}{7!} a_1$ etc.

Wir vermuten nun, dass für gerade Indizes $(n = 2k)$ gilt $a_{2k} = \frac{1}{(2k)!} a_0$ und für ungerade Indizes $(n = 2k+1)$ $a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!} a_1$.

Dies kann mit vollständiger Induktion und der Rekursionsformel leicht gezeigt werden.

Somit ist

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} =$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad a_0, a_1 \text{ frei wählbar}$$

Man beachte weiters, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(2k)!} x^{2k} = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \ \text{ ist.}$$

Also ist $y = \frac{a_0}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{a_1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{a_0+a_1}{2} e^x + \frac{a_0-a_1}{2} e^{-x}$.

Beispiel. $y'' + 3xy' + 3y = 0$

Wir suchen eine Lösung um $x_0 = 0$, also $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Dann ist $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ und $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Eingesetzt in die Differenzialgleichung ergibt sich

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n+2)(n+1) a_{n+2} + 3n a_n + 3a_n\} x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + 3(n+1) a_n = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$a_{n+2} = -\tfrac{3}{n+2} a_n = 0 \quad \text{für } \ n \geq 0 \quad \ldots \text{ Rekursionsformel}$$

Wir erhalten

$n = 0 \qquad a_2 = -\frac{3}{2} a_0$

$n = 1 \qquad a_3 = -\frac{3}{3} a_1$

$n = 2 \qquad a_4 = -\frac{3}{4} a_2 = \frac{3^2}{2 \cdot 4} a_0$

$$n = 3 \qquad a_5 = -\tfrac{3}{5}a_3 = \tfrac{3^2}{3 \cdot 5}a_1$$

$$n = 4 \qquad a_6 = -\tfrac{3}{6}a_4 = -\tfrac{3^3}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_0 = -\tfrac{3^3}{2^3 1 \cdot 2 \cdot 3}a_0$$

$$n = 5 \qquad a_7 = -\tfrac{3}{7}a_5 = -\tfrac{3^3}{3 \cdot 5 \cdot 7}a_1$$

Daraus vermuten wir (und zeigen mit vollständiger Induktion) dass

$$n = 2k \qquad a_{2k} = (-1)^k \tfrac{3^k}{2^k \cdot k!}a_0$$

$$n = 2k+1 \qquad a_{2k+1} = (-1)^k \tfrac{3^k}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}a_1 =$$

$$= (-1)^k \tfrac{3^k \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k) \cdot (2k+1)}a_1 = (-1)^k \tfrac{3^k \cdot 2^k \cdot k!}{(2k+1)!}a_1$$

Somit ist

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} =$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{3^k}{2^k \cdot k!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{6^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$