Wichtige Sätze der Analysis

1) Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine **Stammfunktion** zu f (im Intervall (a, b)), wenn

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a, b) \quad .$$

Es gilt:

• Für ein festes $\xi \in (a, b)$ ist $\varphi(x) = \int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt$ eine Stammfunktion von f (mit $\varphi(\xi) = 0$)

• Ist $\varphi(x)$ eine (spezielle) Stammfunktion von f , dann erhält man alle Stammfunktionen durch $\varphi(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Die Familie aller Stammfunktionen von f ist durch das unbestimmte Integral $F(x) = \int f(x)dx$ gegeben.

• Im speziellen ist $F(x) = \int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt + \eta$ eine Stammfunktion von f mit der Eigenschaft $F(\xi) = \eta$.

2) Satz von der Umkehrabbildung

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

Sei $a \in G$ und $b = f(a)$.

Ist die Jacobi-Determinante $J_f(a) \neq 0$, dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von $a \in G$ und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $b = f(a)$, sodass $f : U \to V$ bijektiv ist.

Die Umkehrabbildung $g : V \to U$ ist dann ebenfalls stetig differenzierbar.

Des weiteren ist für jedes $x \in U$ die Jacobi-Matrix von g im Punkt $y = f(x) \in V$ gleich der inversen Jacobi-Matrix von f im Punkt x .

Diese Aussage ist bei Koordinatentransformationen von Bedeutung.

3) Satz über implizite Funktionen

Es geht dabei um ein (i.a. nichtlineares) Gleichungssystem der Form

$$f_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$$

$$f_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$$

$$\ldots$$

$$f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$$

welches nach den y_i "aufgelöst" werden soll.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Punkte

$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ mit (x, y) , $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Seien die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ stetig differenzierbar und gelte weiters $f(a, b) = 0$.

Ist $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$ im Punkt (a, b) , dann

existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^m$ von $a \in \mathbb{R}^m$ und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $b \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ für jedes $x \in U$ genau eine Lösung $y = g(x)$ besitzt. Dabei ist die Abbildung $g : U \to V$ stetig differenzierbar.

Das heißt also: der im Bereich $U \times V$ gelegene Teil der Punktmenge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} \ : \ f(x, y) = 0\}$$

kann als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \to V$ aufgefasst werden, und wir können dort schreiben

$$y_1 = g_1(x_1, \ldots, x_m)$$

$$\ldots$$

$$y_n = g_n(x_1, \ldots, x_m)$$

Beispiel. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, etwa $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Die Punktmenge $f(x, y) = 0$ ist der Einheitskreis in der Ebene.

Hier ist $m = n = 1$. Für $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt $f(a, b) = 0$.

Weil $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \neq 0$ in (a, b) gilt, gibt es eine Funktion $g(x)$, sodass lokal $f(x, g(x)) = 0$ gilt.

Hier ist es natürlich die Funktion $g(x) = +\sqrt{1 - x^2}$.

Natürlich gilt wegen $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \neq 0$ in (a, b) auch, dass eine Funktion $h(y)$ existiert, sodass lokal $f(h(y), y) = 0$ gilt.

In unserem Fall $h(y) = +\sqrt{1 - y^2}$.

Man beachte, dass im Punkt $(1, 0)$ **nicht** nach y aufgelöst werden kann, wohl aber nach x .

Beispiel. Seien stetig differenzierbare Funktionen $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ gegeben.

Für einen Punkt (a, b, c) gelte $f_1(a, b, c) = 0$ und $f_2(a, b, c) = 0$.

Ist etwa $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$ im Punkt (a, b, c) , dann

gibt es Funktionen $x = x(y)$ und $z = z(y)$ sodass die Punktmenge $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$ lokal (um den Punkt (a, b, c)) durch

$f_1(x(y), y, z(y)) = 0$, $f_2(x(y), y, z(y)) = 0$ dargestellt wird.

Bemerkung. Der Satz über implizite Funktionen gibt nicht an, wie die Auflösung konkret zu bewerkstelligen ist.