

# Lineare Differenzialgleichung und verwandte Fälle

## 1. Die lineare Differenzialgleichung

Eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung besitzt die Form

$$y' + g(x)y = h(x) \quad , \text{ wobei } g(x) \text{ und } h(x) \text{ stetig sind.}$$

Gilt  $h(x) \equiv 0$  , heißt die Differenzialgleichung **homogen** , ansonsten **inhomogen**.

### **Bemerkung.**

Die obige Differenzialgleichung wird oft in der ”**Operatorschreibweise**”  $Ly = h$  angegeben, wobei  $L$  ein Operator ist, der einer differenzierbaren Funktion  $y(x)$  die Funktion  $y' + g(x)y$  zuordnet.

Man beachte dabei, dass  $L$  ein **linearer** Operator ist, i.e.

$$L(\alpha y + \beta z) = \alpha Ly + \beta Lz .$$

Wir betrachten als erstes den Fall der **homogenen** Differenzialgleichung, d.h.

$$y' + g(x)y = 0 .$$

Wir erhalten  $y' = -g(x)y$  . Dies ist eine Dgl. mit getrennten Variablen.

Folglich ist  $y = 0$  eine Lösung. Für  $y \neq 0$  gilt

$$\frac{dy}{y} = -g(x)dx \Rightarrow \ln |y| = -\int g(x)dx + K$$

Setzen wir  $G(x) = \int g(x)dx$  , erhalten wir

$$|y| = e^K e^{-G(x)} \Rightarrow y(x) = C e^{-G(x)} \quad \text{mit } C \neq 0 .$$

Mit  $y = 0$  erhalten wir damit als **allgemeine Lösung**

$$y(x) = C e^{-G(x)} \quad , \quad C \in \mathbb{R} .$$

**Bemerkung.** Ist darüberhinaus eine Anfangsbedingung  $y(\xi) = \eta$  gegeben, dann kann  $C$  eindeutig aus  $\eta = Ce^{-G(\xi)}$  bestimmt werden.

Nun zur **inhomogenen** Differenzialgleichung  $y' + g(x)y = h(x)$  .

**Beobachtung.** Seien  $y_1(x), y_2(x)$  zwei Lösungen der inhomogenen Differenzialgleichung und sei  $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$  .

Dann ist  $z' + g(x)z = h(x) - h(x) = 0$  und damit ist  $z(x)$  eine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung !

Wir erhalten  $y_1(x) = z(x) + y_2(x)$  und dies bedeutet :

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung kann in der Form

$$y(x) = z(x) + y_p(x)$$

angegeben werden, wobei  $z(x)$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung bezeichnet und  $y_p(x)$  eine spezielle oder **partikuläre** Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung.

Damit stellt sich die Frage, wie man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung finden kann.

1. **Ansatz** (und nachfolgendem Koeffizientenvergleich)

**Beispiel.**  $y' - y = x^2$

Hier ist  $h(x) = x^2$  ein Polynom 2. Grades, wir können also den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ versuchen.}$$

$y_p'(x) = 2Ax + B$  , eingesetzt in die Differenzialgleichung erhalten wir

$$2Ax + B - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 \text{ bzw.}$$

$$-Ax^2 + (2A - B)x + (B - C) = x^2 \Rightarrow$$

$$-A = 1 \text{ , } 2A - B = 0 \text{ , } B - C = 0 \text{ und damit}$$

$$A = -1 \text{ , } B = -2 \text{ , } C = -2$$

Also ist  $y_p(x) = -x^2 - 2x - 2$  .

## 2. "Variation der Konstanten"

Sei  $y(x) = Ce^{-G(x)}$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung. Dann betrachten wir den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)e^{-G(x)}$$

und setzen diesen in die inhomogene Differenzialgleichung ein.

Mit  $y'_p = C'e^{-G} - CG'e^{-G} = C'e^{-G} - Cge^{-G}$  gilt dann

$$C'(x)e^{-G(x)} - C(x)g(x)e^{-G(x)} + g(x)C(x)e^{-G(x)} = h(x) \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-G(x)} = h(x) \quad \text{bzw.} \quad C'(x) = h(x)e^{G(x)} \Rightarrow$$

$$C(x) = \int h(x)e^{G(x)} dx$$

Dadurch erhalten wir also eine spezielle Lösung  $y_p(x)$ .

**Beispiel.**  $y' - y = x^2$

Die zugehörige homogene Differenzialgleichung ist  $y' - y = 0$  mit der allgemeinen Lösung  $y_H = Ce^x$ .

Also treffen wir den Ansatz  $y_p = C(x)e^x$ . Eingesetzt in die Differenzialgleichung erhalten wir

$$C'e^x + Ce^x - Ce^x = x^2 \Rightarrow C'(x) = x^2e^{-x} \Rightarrow$$

$$C(x) = \int x^2e^{-x} dx = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2)$$

Folglich ist  $y_p(x) = C(x)e^x = -x^2 - 2x - 2$  und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist

$$y(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ist die Anfangsbedingung  $y(1) = 0$  gegeben, erhalten wir

$$0 = Ce - 1 - 2 - 2, \quad \text{also} \quad C = \frac{5}{e},$$

und daraus die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = \frac{5}{e}e^x - x^2 - 2x - 2.$$

## 2. Bernoulli Differenzialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0 \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad , \quad \alpha \neq 1 \quad , \quad \alpha \neq 0$$

Diese Differenzialgleichung läßt sich durch die Substitution

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha} \quad (\text{also } y^\alpha z = y)$$

auf eine lineare Differenzialgleichung für  $z(x)$  zurückführen.

$$z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y' \Rightarrow y' = \frac{1}{1-\alpha}y^\alpha z' . \text{ Damit}$$

$\frac{1}{1-\alpha}y^\alpha z' + g(x)y^\alpha z + h(x)y^\alpha = 0$  . Multiplikation mit  $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$  liefert

$$z' + (1 - \alpha)g(x)z = (\alpha - 1)h(x)$$

Dies ist eine lineare Differenzialgleichung für  $z(x)$  , aus deren Lösung sich  $y(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$  bestimmen läßt.

### Bemerkungen.

(a) für ein beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $y^\alpha$  nur für  $y > 0$  definiert (weil  $y^\alpha = e^{\alpha \ln y}$ ) .

(b) Falls  $\alpha \geq 0$  , dann ist die Differenzialgleichung für  $y \geq 0$  erklärt und  $y = 0$  ist eine Lösung.

(c) Sei  $\alpha \in \mathbb{Z}$  ,  $\alpha$  ungerade

Wenn  $y(x)$  eine positive Lösung ist, dann ist  $u(x) = -y(x)$  ebenfalls Lösung. Die Lösungsgesamtheit ist gegeben durch

$$y(x) = \bar{y}(x) \quad , \quad \bar{y}(x) \text{ ist positive Lösung}$$

$$y(x) = -\bar{y}(x)$$

$$(y(x) = 0 \quad \text{wenn } \alpha > 0)$$

(d) Sei  $\alpha \in \mathbb{Z}$  ,  $\alpha$  gerade

Ist  $z(x)$  eine negative Lösung der linearen Dgl. für  $z(x)$  , dann ist

$y(x) = -(-z)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  eine negative Lösung. Die Lösungsgesamtheit ist

$$y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{falls } z \geq 0$$

$$y(x) = -(-z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{falls } z < 0$$

$$(y(x) = 0 \quad \text{wenn } \alpha > 0)$$

**Beispiel.** Sei  $y' + \frac{1}{1+x}y + (1+x)y^4 = 0$  gegeben.

Dies ist eine Bernoulli Dgl mit  $\alpha = 4$ ,  $g(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $h(x) = 1+x$ .

Die Substitution  $z = y^{1-\alpha} = y^{-3}$  liefert

$$z' - \frac{3}{1+x}z = 3(1+x).$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl ist

$$z_H = Ce^{-G(x)} \quad \text{mit} \quad G(x) = \int \frac{-3}{1+x} dx = -\ln(1+x)^3, \quad \text{also}$$

$$z_H(x) = C(1+x)^3.$$

Variation der Konstanten liefert  $z_p = -3(1+x)^2$  und damit ist

$$z(x) = C(1+x)^3 - 3(1+x)^2 = (1+x)^2(C(1+x) - 3).$$

Folglich ist durch Rücksubstitution

$$y(x) = z(x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(C(1+x)-3)}} \quad \text{die allgemeine Lösung.}$$

Des weiteren ist hier auch  $y = 0$  eine Lösung.

### 3. Riccati Differenzialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$$

Eine Riccati Dgl kann insbesondere dann gelöst werden, wenn eine spezielle Lösung  $\varphi(x)$  bereits bekannt ist (durch Erraten, Ansatz o.ä.).

Treffen wir nämlich dann den Ansatz  $u(x) = y(x) - \varphi(x)$ , so erhalten wir durch Einsetzen

$$u' + (g(x) + 2h(x)\varphi(x))u + h(x)u^2 = 0.$$

Dies ist nun eine Bernoulli Dgl für  $u(x)$  mit  $\alpha = 2$  und führt gemäß vorher mit der Substitution  $z(x) = \frac{1}{u(x)}$  zur linearen Dgl

$$z' - (g(x) + 2h(x)\varphi(x))z = h(x) .$$

Dann ist  $u(x) = \frac{1}{z(x)}$  und  $y(x) = u(x) + \varphi(x)$  .

**Beispiel.**  $y' + 2xy + xy^2 = 3x$

Dies ist eine Riccati Dgl . Durch Einsetzen zeigt sich, dass  $\varphi(x) = 1$  eine spezielle Lösung ist.

Die Substitution  $u(x) = y(x) - 1$  liefert

$$u' + 4xu + xu^2 = 0 . \quad (\text{Bernoulli Dgl})$$

Die weitere Substitution  $z(x) = \frac{1}{u(x)}$  ( $u \neq 0$  , also  $y \neq 1$ ) liefert

$$z' - 4xz = x . \quad (\text{lineare Dgl})$$

Diese besitzt die Lösung  $z(x) = Ce^{2x^2} - \frac{1}{4}$  .

Also ist  $y(x) = \frac{1}{z(x)} + \varphi(x) = \frac{1}{Ce^{2x^2} - \frac{1}{4}} + 1$  und  $y = 1$  ist eine weitere Lösung.