Kurvenscharen

Wir sahen früher, dass die Lösungen einer Dgl $y' = f(x, y)$ eine (einparametrige) Kurvenschar bilden.

Damit stellt sich die Frage, wie wir, ausgehend von einer einparametrigen Kurvenschar, die zugehörige Differenzialgleichung bestimmen können.

- $y = f(x; C)$

Durch Differenzieren nach x und nachfolgender Elimination von C aus den beiden Gleichungen erhalten wir die zugehörige Differenzialgleichung für $y(x)$.

Bemerkung. Analoges gilt für den Fall $x = g(y; C)$ wo wir eine Dgl für $x(y)$ erhalten.

Beispiel. $y = Cx^2$

$y' = 2Cx \quad \Rightarrow \quad xy' = 2Cx^2 = 2y$

Also $y' = \frac{2y}{x} \quad (x \neq 0)$

- $F(x, y; C) = 0$

Für $F_y \neq 0$ kann die Gleichung lokal nach y aufgelöst werden, d.h. wir haben $F(x, y(x); C) = 0$ vorliegen.

Differenzieren nach x liefert $F_x + F_y \cdot y' = 0$. Mit Hilfe der ersten Gleichung $F(x, y; C) = 0$ wird C eliminiert und wir erhalten

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

Bemerkung. Im Falle $F_x \neq 0$ erhalten wir analog $x'(y) = -\frac{F_y}{F_x}$.

Beispiel. $x^2 + y^2 = C > 0$ (Schar konzentrischer Kreise)

$F(x, y; C) = x^2 + y^2 - C = 0 \quad , \quad F_y = 2y \neq 0$ für $y \neq 0$.

Für $y \neq 0$ erhalten wir also $y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$.

- $x = x(t;C)$, $y = y(t;C)$ (Kurvenschar in Parameterdarstellung)

Falls $\dot{x}(t_0) \neq 0$, dann ist $x(t)$ lokal (um t_0) umkehrbar, also

$y = y(t(x);C) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Elimination von C liefert dann die Differenzialgleichung.

Bemerkung. Für $\dot{y}(t_0) \neq 0$ erhalten wir $x'(y) = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$.

Beispiel. $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $r > 0 \ldots$ Parameter

$\dot{x} = -r\sin t \neq 0$ für $t \neq 0$ und $t \neq \pi$.

In diesem Fall gilt $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\frac{x}{y}$.