Inhomogene Systeme

Ein inhomogones lineares System hat die Form

$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)\ .$$

Wie im Fall $n = 1$ erhalten wir die grundlegende Aussage betreffend die Lösungsgesamtheit $\vec{y}(t)$ eines inhomogenen Systems, nämlich

$$\vec{y}(t) = \vec{x}(t) + \vec{z}(t)$$

wobei $\vec{x}(t)$ die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems bezeichnet, und $\vec{z}(t)$ **eine** spezielle Lösung des inhomogenen Systems.

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems kann wiederum mit dem Verfahren der **Variation der Konstanten** (zumindest prinzipiell) gefunden werden.

Sei $Y(t) = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ ein FS von $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$.

Dann kann die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung beschrieben werden durch

$$\vec{y} = Y\vec{v} = C_1\vec{y}_1 + \ldots + C_n\vec{y}_n \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\ .$$

Wir treffen nun als Ansatz für die spezielle Lösung $\vec{z}(t) = Y(t)\vec{v}(t)$.

$\vec{z}\,' = A\vec{z} + \vec{b} \quad \Rightarrow \quad Y'\vec{v} + Y\vec{v}\,' = AY\vec{v} + \vec{b} = Y'\vec{v} + \vec{b} \qquad (\text{weil } AY = Y')$

Damit ist $Y\vec{v}\,' = \vec{b}$ bzw. $\vec{v}\,' = Y^{-1}\vec{b}$ und

$$\vec{v}(t) = \int Y^{-1}(t)\vec{b}(t)dt\ .$$

Beispiel. Angenommen, $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ bilden ein FS von

$\vec{y}\,' = A\vec{y}$ und es sei $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$.

Dann ist $Y(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ und $Y^{-1}(t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$.

Weiters ist $Y^{-1}(t)\vec{b}(t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 3t \\ t^2 - 2 \end{pmatrix}$

Damit ist $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \int \frac{3t}{t^2+1} dt \\ \int \frac{t^2-2}{t^2+1} dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\ln(t^2+1) \\ 1 - 3\arctan t \end{pmatrix}$

und als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir

$$\vec{z}(t) = Y(t)\vec{v}(t) \ .$$