

# Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten ein homogenes System  $\vec{y}' = A\vec{y}$

wobei  $A$  eine **konstante reelle**  $n \times n$  Matrix ist.

Setzen wir den Ansatz  $\vec{y} = e^{\lambda t}\vec{c}$  ein, erhalten wir

$$\lambda e^{\lambda t}\vec{c} = Ae^{\lambda t}\vec{c} = e^{\lambda t}A\vec{c}.$$

Weil  $e^{\lambda t} \neq 0$ , gilt  $\lambda\vec{c} = A\vec{c}$  bzw.  $(A - \lambda E_n)\vec{c} = \vec{0}$ .

**Dies bedeutet:** (siehe Lineare Algebra) Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  und  $\vec{c}$  ein zugehöriger Eigenvektor, dann ist

$$\vec{y} = e^{\lambda t}\vec{c} \text{ eine Lösung von } \vec{y}' = A\vec{y}.$$

**Bemerkung.** Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also die Lösungen von  $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0$ .

Weiters ist bekannt dass  $P_n(\lambda)$   $n$  komplexe Nullstellen besitzt.

**Bemerkung.** Lösungen  $\vec{y}_i(t) = e^{\lambda_i t}\vec{c}_i$  sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren  $\vec{c}_i$  linear unabhängig sind.

Wir erhalten also insbesondere dann ein Fundamentalsystem, wenn es  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren gibt, d.h. wenn die Matrix  $A$  **diagonalisierbar** ist.

Dies ist z.B. dann gegeben, wenn es  $n$  verschiedene Eigenwerte gibt. Im allgemeinen Fall bedeutet Diagonalisierbarkeit, dass die Vielfachheit jedes Eigenwertes mit der Dimension des zugehörigen Eigenraums übereinstimmt.

Ist die Matrix  $A$  nicht diagonalisierbar, ist es auch möglich, ein Fundamentalsystem zu gewinnen (unter Zuhilfenahme von Jordan-Matrizen).

Dies wird hier nicht weiter behandelt. Erwähnt sei lediglich :

Hat der Eigenwert  $\lambda$  die Vielfachheit  $r$ , dann gibt es  $r$  linear unabhängige Lösungen der Form

$$\vec{y} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

wobei die  $p_i(t)$  Polynome vom Grad  $\leq r - 1$  sind.

Im allgemeinen können ein Eigenwert  $\lambda$  und ein zugehöriger Eigenvektor  $\vec{c}$  komplex sein. Wir sind hier allerdings an reellen Lösungen interessiert.

Sei also  $\lambda = \mu + i\nu$  ( $\nu \neq 0$ ) ein Eigenwert von  $A$  und  $\vec{c} = \vec{a} + i\vec{b}$  ein zugehöriger Eigenvektor.

Weil die Matrix  $A$  reell ist, ist auch  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert. Wir werden sehen, dass wir zum Paar  $\lambda, \bar{\lambda}$  zwei reelle Lösungen erhalten (hat  $\lambda$  die Vielfachheit  $r$ , dann liefert  $\lambda, \bar{\lambda}$   $2r$  reelle Lösungen).

**Bemerkung.** Ist  $\vec{y} = \operatorname{Re}\vec{y} + i\operatorname{Im}\vec{y}$  eine Lösung, dann liefert Einsetzen in die Differenzialgleichung dass

$\operatorname{Re}\vec{y}$  und  $\operatorname{Im}\vec{y}$  reelle Lösungen sind.

$$\begin{aligned} \text{Damit : } \vec{y} &= \vec{c}e^{\lambda t} = (\vec{a} + i\vec{b})e^{(\mu+i\nu)t} = (\vec{a} + i\vec{b})e^{\mu t}(\cos \nu t + i \sin \nu t) = \\ &= e^{\mu t}(\vec{a} \cos \nu t - \vec{b} \sin \nu t) + ie^{\mu t}(\vec{a} \sin \nu t + \vec{b} \cos \nu t) \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } \operatorname{Re}\vec{y} = e^{\mu t}(\vec{a} \cos \nu t - \vec{b} \sin \nu t) \quad , \quad \operatorname{Im}\vec{y} = e^{\mu t}(\vec{a} \sin \nu t + \vec{b} \cos \nu t) \quad .$$

**Beispiel.** Ein System  $\vec{y}' = A\vec{y}$  habe die Eigenwerte  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_{2,3} = -3$ .

Zu  $\lambda = 2$  sei  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor.

Zu  $\lambda = -3$  mögen 2 linear unabhängige Eigenvektoren  $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  existieren.

Dann bilden  $\vec{y}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y}_2 = e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y}_3 = e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

ein Fundamentalsystem (und jede Lösung ist als Linearkombination dieser Fundamentallösungen darstellbar).

**Beispiel.** Ein System  $\vec{y}' = A\vec{y}$  habe die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1 + i$  und  $\lambda_2 = 1 - i$ .

Zu  $\lambda = 1 + i$  sei  $\begin{pmatrix} i \\ 3 + i \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor.

Dann ist  $e^{(1+i)t} = e^t(\cos t + i \sin t)$ ,  $\begin{pmatrix} i \\ 3 + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die reellen Lösungen sind damit

$$e^t \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t \right) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$e^t \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t \right) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ 3 \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$