Übungsblatt 07 - Differenzialgleichungen - SS 2013

(Riegelnegg, Planitzer, Blatnik, Puhr)

1. Gegeben sei die Differenzialgleichung $y = 3xy' + 6y^2y'^2$. Multiplizieren Sie die Gleichung mit y^2 , wenden Sie die Substitution $z(x) = y^3(x)$ an und lösen Sie die nun vorliegende Dgl.

2. Gegeben sei die Differenzialgleichung $y' = \sqrt{y}$ mit $y \geq 0$.
Zeigen Sie, dass die Dgl. in **keiner** Umgebung von $(\xi, 0)$ einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt. Sei weiters $\eta > 0$. Zeigen Sie dass es eine Umgebung von (ξ, η) gibt, wo die Dgl. einer Lipschitzbedingung bzgl. y genügt.

3. Warum ist das Anfangswertproblem $y' = 3x^2y^4 + e^x \cos y$, $y(\xi) = \eta$ stets eindeutig lösbar?

4. Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = x+y$, $y(0) = 1$. Mittels sukzessiver Approximation bestimme man die Näherungslösungen $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$, wobei die Startfunktion $y_0(x) = 1$ vorgegeben ist. (Zusatz: man stelle eine Vermutung für $y_n(x)$ auf und zeige, dass $y_n(x) \to 2e^x - 1 - x$.)

5. Für die Funktion $y(t)$ gelte die Differenzialgleichung $y''' - 2y'' + ty' - y = 0$. Führen Sie die Dgl. in ein System 1. Ordnung $\vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y})$ über, und bestimmen Sie dann eine Matrix A sodass $\vec{f}(t, \vec{y}) = A\vec{y}$.

6. Sei $A(t)$ eine $n \times n$ Matrix und $\vec{x}(t)$ ein Vektor mit n Komponenten, und $\vec{y}(t) = A\vec{x}$.
Zeigen Sie, dass $\vec{y}\,' = A'\vec{x} + A\vec{x}\,'$.