Übungsblatt 08 - Differenzialgleichungen - SS 2013

(Riegelnegg, Planitzer, Blatnik, Puhr)

1. Gegeben sei die Differenzialgleichung $(3xy^2 + 5x^3y)dx + (4x^2y + 3x^4)dy = 0$. Man bestimme $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $M(x,y) = xy^\alpha$ ein integrierender Faktor ist und löse dann die Differenzialgleichung.

2. Gegeben sei die d'Alembertsche Differenzialgleichung $y = xy'^2 + y'$. Setze $p = y'$. Man zeige, dass nach Differenziation der Dgl nach x eine lineare Dgl für die Funktion $x(p)$ ensteht.

3. Für die Funktionen $x_1(t), x_2(t)$ sei das lineare System $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = 8x_1 + 3x_2$ gegeben.

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4e^{5t} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$ Lösungen des Systems sind. Bestimmen Sie die Lösungsmatrix und die Wronsky-Determinante. Sind die Lösungen linear unabhängig?

4. Bestimmen Sie ein lineares System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ derart, dass $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ und $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t^2 + t \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem bilden.

5. Gegeben sei das System $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}$.

Man verifiziere, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ eine Lösung ist und bestimme eine zweite Lösung mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert.