

Übungstest 1 - Differenzialgleichungen - SS 2013 Lösungen

Ad 1. Differenzialgleichung mit getrennten Variablen, $\frac{y^2}{y+1}dy = -\frac{x^2}{x-1}dx$.

$$(y - 1 + \frac{1}{y+1})dy = -(x + 1 + \frac{1}{x-1})dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} - y + \ln|y+1| = -(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|) + C$$

bzw. $y^2 + x^2 - 2y + 2x + \ln|y+1||x-1| = 2C$, $C \in \mathbb{R}$.

Ad 2. $xy' + y - \frac{1}{y} = 0$. Substitution $z = xy \Rightarrow z' = y + xy'$ und

$$z' - \frac{x}{z} = 0. \text{ Damit } z dz = x dx \text{ und } \frac{z^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2} \text{ bzw. } z^2 = x^2 + C \text{ bzw. } x^2 y^2 = x^2 + C.$$

Ad 3. Lineare Differenzialgleichung mit $g(x) = -\frac{1}{x-2} \Rightarrow G(x) = -\ln|x-2|$.

Damit $y_H = C(x-2)$.

Variation der Konstanten liefert $C'(x-2) = 2(x-2)^2$ bzw. $C = (x-2)^2$ und $y_p = (x-2)^3$.

Damit $y = C(x-2) + (x-2)^3$. Mit $y(3) = 4 \Rightarrow C = 3$, also $y = 3(x-2) + (x-2)^3$.

Ad 4. Bernoulli Differenzialgleichung mit $\alpha = 3$, $g(x) = -\frac{1}{2}$, $h(x) = \frac{1}{2}$.

$y = 0$ ist Lösung. Für $y \neq 0$ Substitution $z = y^{-2}$, liefert $z' + z = 1$.

$$\Rightarrow z = Ce^{-x} + 1 \text{ und } \frac{1}{y^2} = Ce^{-x} + 1 \text{ bzw. } y^2 = \frac{1}{Ce^{-x} + 1}, C \in \mathbb{R}.$$