Die vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren für Aussagen $A(n)$, welche von einer natürlichen Zahl n abhängen, z.B.

$A(n)\ :\ 1+2+3+\ldots=\frac{n(n+1)}{2}$ für $n\geq 1$

Prinzip der vollständigen Induktion :

• **Induktionsanfang :** Die Aussage $A(n)$ ist wahr für einen Anfangswert $n=n_0$ (sehr oft $n=1$)

• **Induktionsvoraussetzung :** $A(n)$ sei wahr $(n\geq n_0)$

(oder : $A(k)$ sei wahr für $n_0\leq k\leq n$)

• **Induktionsbehauptung :** $A(n+1)$ ist wahr.

• **Induktionsbeweis :** Gelingt es allgemein zu beweisen, dass aus der Gültigkeit der Induktionsvoraussetzung die Induktionsbehauptung folgt, dann ist $A(n)$ für alle $n\geq n_0$ erfüllt.

Beispiel. Man beweise, dass $\sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

Hier ist $A(n)\ :\ \sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ und damit

$A(n+1)\ :\ \sum\limits_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (ersetze n durch $n+1$)

• **Induktionsanfang :** $n=1$

Linke Seite $\sum\limits_{k=1}^{1}k=1$, Rechte Seite $\frac{1\cdot 2}{2}=1$, also richtig.

• **Induktionsvoraussetzung :** $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

- **Induktionsbehauptung :** $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

- **Induktionsbeweis :** $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \sum\limits_{k=1}^{n} k + (n+1) =$

$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Damit ist der Beweis geführt.

Beispiel. (**Bernoulli-Ungleichung**)

$(1+x)^n > 1 + nx$ für $x > -1$, $x \neq 0$ und $n \geq 2$.

Für $n = 2$ ist die Ungleichung wegen $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ erfüllt.

Gelte also $(1+x)^n > 1 + nx$.

Die Induktionsbehauptung ist dann $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$.

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 >$

$> 1 + (n+1)x$ weil $1 + x > 0$, $nx^2 > 0$.

Bemerkung. Setzen wir $y = 1 + x$, dann erhalten wir

$y^n > 1 + n(y-1)$ für $y > 0$ und $n \geq 2$.

Beispiel. Man beweise, dass $2^n > n^2$ für $n \geq 5$.

Für $n = 5$ ist die Ungleichung wegen $32 > 25$ erfüllt.

Gelte $2^n > n^2$. Zu zeigen ist dann $2^{n+1} > (n+1)^2$.

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Dies ist richtig, weil $(n-1)^2 > 2$ ist und damit

$n^2 - 2n + 1 > 2$, $n^2 > 2n + 1$ und $2n^2 > n^2 + 2n + 1$.

Beispiel. Man beweise den binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ .$$

Dabei ist der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ ("n über k") erklärt durch

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ sowie $0! = 1$.

Man rechnet leicht nach, dass $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ ist.

Für $n = 1$ ist die linke Seite $(a+b)^1 = a+b$, und die rechte Seite ist

$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a+b$.

Gelte also $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Dann ist zu zeigen, dass

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k)(a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \ .$$

Nun ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k$ und

(durch die Setzung $k^* = k+1$ und späterer Umbenennung $k^* = k$)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k^*=1}^{n+1} \binom{n}{k^*-1} a^{n-k^*+1} b^{k^*} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \ .$$

Damit ist $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} =$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \ .$$