Folgen und Reihen von Funktionen

Sehr häufig treten in der Mathematik Folgen bzw. Reihen von Funktionen auf. Ist etwa (f_n) eine Folge von Funktionen, dann können wir uns für ein **festes** x fragen, ob die entstandene Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert oder nicht.

Beispiel. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Man kann zeigen, dass für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ die entstandene Zahlenfolge gegen e^x konvergiert.

Ebenso kann gezeigt werden, dass für ein festes $x \in \mathbb{R}$ die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ die Summe e^x hat.

Eine Besonderheit von Funktionenfolgen bzw. -reihen ist, dass es dabei mehrere wichtige Konvergenzbegriffe gibt. Wir beschäftigen uns im folgenden mit der "punktweisen Konvergenz" und der "gleichmäßigen Konvergenz".

Sei nun eine Folge (f_n) von Funktionen gegeben, wobei jedes f_n auf der Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ (bzw. $X \subseteq \mathbb{C}$) definiert ist. Für ein festes $x \in X$ liegt dann eine Zahlenfolge vor, welche auf Konvergenz untersucht werden kann.

Definition.

(i) (f_n) heißt **punktweise konvergent** an der Stelle $x \in X$, wenn die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert.

$X_K = \{x \in X \ : \ (f_n(x)) \text{ konvergiert}\}$ heißt dann die **Konvergenzmenge** der Folge (f_n) .

(ii) Die Funktion f mit Definitionsbereich X_K und $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ heißt die **Grenzfunktion** von (f_n) .

Die "Nachteile" der bloßen punktweisen Konvergenz werden an folgenden Beispielen ersichtlich.

Beispiele.

1) Sei $X = [0,1]$ und $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^2x^2}$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ wenn $0 < x \leq 1$ sowie $f(x) = 0$ für $x = 0$.

D.h. die Grenzfunktion einer Folge von beschränkten Funktionen kann unbeschränkt sein, die Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen kann unstetig sein (zum Begriff der Stetigkeit siehe später).

2) Sei $X = [0,\infty)$ und $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = 0 \ \forall\, x \in X_K$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx = 1$, aber $\int\limits_0^\infty f(x)dx = 0$.

D.h. Integration und Grenzwertbildung können im allgemeinen **nicht** vertauscht werden.

3) Sei $X = \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Dann ist $X_K = X$ und es gilt $f(x) = 0 \ \forall\, x \in X_K$.

Da die Folge der Ableitungen $(f_n'(x)) = (\sqrt{n}\cos nx)$ für kein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, sind also Differentiation und Grenzwertbildung im allgemeinen ebenfalls **nicht** vertauschbar.

Bemerkung. Die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge (f_n) gegen f auf einer Menge X bedeutet, dass es zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon(x)$ gibt, sodass für alle $n > N_\varepsilon(x)$ gilt, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Die Frage, die sich nun stellt, ist : Kann ein von x unabhängiges N_ε gewählt werden. Es ist zu erwarten, dass dies von der betrachteten Menge X abhängt.

Beispiel.

Sei $X = (0,1)$ und $f_n(x) = x^n$. Dann ist $f(x) = 0 \ \forall\, x \in X$.

Ist $0 < \varepsilon < 1$ gegeben, dann erhalten wir für das zugehörige $N_\varepsilon(x)$:

$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$. Der Ausdruck $\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ wird aber unbeschränkt für $x \to 1$.

Also kann es kein "universelles" N_ε auf $(0,1)$ geben.

Betrachten wir hingegen $f_n(x) = x^n$ auf $X = (0, \frac{1}{2})$ und setzen $N_\varepsilon = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}$ für ein $0 < \varepsilon < 1$, dann gilt für alle $n > N_\varepsilon$ und **für alle** $x \in X$, dass

$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$.

N_ε hängt hier also **nicht** von x ab.

Definition. Die Funktionenfolge (f_n) heißt **gleichmäßig konvergent gegen** f **auf** X , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine (von x unabhängige) Zahl N_ε gibt, sodass für alle $n > N_\varepsilon$ und alle $x \in X$ gilt :

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Schreibweise : $f_n(x) \underset{X}{\to} f(x)$ oder $f_n(x) \underset{glm}{\to} f(x)$.

Bemerkung. Gleichmäßige Konvergenz bedeutet anschaulich, dass die Graphen von $f_n(x)$ für alle $n > N_\varepsilon$ in einem 2ε-Streifen um den Graphen von $f(x)$ liegen.

Beispiel. Sei $X = [1, \infty)$ und $f_n(x) = e^{-nx}$. Dann ist $f(x) = 0 \;\; \forall\, x \in X$.

Wegen $|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx} \leq e^{-n} < \varepsilon$ für $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$ und $0 < \varepsilon < 1$ gilt, dass die Funktionenfolge gleichmäßig auf X konvergiert.

Die nachstehende Aussage wird gelegentlich zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz verwendet.

Satz. (**Cauchy-Kriterium**) Folgende Aussagen sind gleichwertig :

1) $f_n(x) \underset{X}{\to} f(x)$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \;\; \forall\, n, m > N_\varepsilon$ und $\forall\, x \in X \; : \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Die folgenden wichtigen Eigenschaften der gleichmäßigen Konvergenz seien ohne Beweis angeführt :

Satz. Es gelte $f_n(x) \underset{X}{\rightarrow} f(x)$.

1) Sind alle f_n beschränkt auf X , dann auch f .

2) Sind alle f_n stetig auf X , dann auch f .

3) Ist $X = [a,b]$ und jedes f_n Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, dann ist auch f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ und es gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \ .$$

(D.h. Integration und Grenzwertbildung können vertauscht werden)

Satz. Seien die Funktionen $f_n(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ differenzierbar. Für mindestens ein $x_0 \in [a,b]$ sei $(f_n(x_0))$ konvergent.

Des weiteren sei die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$. Dann gilt

(i) (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen eine Funktion f ,

(ii) f ist auf $[a,b]$ differenzierbar,

(iii) $\frac{d}{dx} \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \right) = f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

Die Konvergenz einer Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ wurde bekanntlich auf die Konvergenz der zugehörigen Folge (s_n) der Partialsummmen zurückgeführt, wobei $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Gilt $s_n \to s$, dann heißt s die Summe der Reihe und $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Dieses Prinzip kommt auch bei der Betrachtung von Funktionenreihen zum Tragen. Sind Funktionen $a_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ gegeben, dann betrachten wir zu einer Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ die zugehörige Funktionenfolge der

Partialsummen $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$.

Dementsprechend heißt eine Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **punktweise konvergent an** $x \in X$, wenn die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ konvergiert, i.e. wenn $(A_n(x))$ konvergiert.

Diejenigen $x \in X$, wo Konvergenz vorliegt, bilden wiederum die Konvergenzmenge X_K , und die auf X_K definierte Funktion A mit $A(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ heißt die **Summenfunktion** der Funktionenreihe .

Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt auf einer Menge X **gleichmäßig konvergent** zur Summenfunktion A , wenn $A_n(x) \underset{X}{\to} A(x)$.

Man verwendet dabei auch die Schreibweise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \underset{X}{=} A(x)$.

Die Anwendung des Cauchy-Kriteriums für Funktionenfolgen liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \underset{X}{=} A(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \;\; \forall\, n \geq m > N_\varepsilon \;\; \text{und} \;\; \forall\, x \in X \; : \; \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)\Big| < \varepsilon$$

Damit kann ein eminent wichtiges Kriterium bewiesen werden

Satz. (**Weierstrass**)

Besitzen die auf X definierten Funktionen $a_k(x)$ dort die Abschätzung $|a_k(x)| \leq c_k$ und konvergiert die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ gleichmäßig auf X .

Beweis. Weil $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert und die Folge der Partialsummen damit eine Cauchy-Folge ist, gilt

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N_\varepsilon\ \ \forall\ n \geq m > N_\varepsilon\ :\ \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon\ .$$

Damit gilt aber für alle $x \in X$

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon\ . \quad \square$$

Aus den entsprechenden Aussagen über Funktionenfolgen ergeben sich analoge Aussagen über Funktionenreihen betreffend Stetigkeit der Summenfunktion sowie "gliedweise" Integration und Differentiation.

Beispiel. Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ konvergiert nach dem Weierstrass-Kriterium auf $[-q, q]$, $q < 1$ gleichmäßig (weil $|(-1)^k x^{2k}| \leq q^{2k}$) und hat dort die Summenfunktion $\frac{1}{1+x^2}$.

Mit $\arctan t = \int\limits_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_0^t \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \right) dx$ erhalten wir

$$\arctan t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^t x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ .$$