Komplexe Zahlen

Da für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt dass $x^2 \geq 0$, besitzt die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ **keine** Lösung in $\mathbb{R}$ bzw. das Polynom $P(x) = x^2 + 1$ besitzt in $\mathbb{R}$ (!) keine Nullstelle.

Dies führt zur Frage, ob es möglich ist, den Körper $\mathbb{R}$ in geeigneter Weise zu einem Körper $\mathbb{C}$ zu erweitern, sodaß die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ lösbar ist.

Wir betrachten nun $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$, die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen, die man sich anschaulich als Ebene vorstellen kann. Klarerweise gilt $(a,b) = (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c$ und $b = d$.

Als nächstes definieren wir 2 Operationen auf $\mathbb{R}^2$ und bezeichnen $\mathbb{R}^2$ mit diesen beiden Operationen als $\mathbb{C}$.

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \qquad \text{(Addition)}$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \qquad \text{(Multiplikation)}$$

Bemerkungen. (i) Man zeigt leicht, dass $\mathbb{C}$ mit diesen beiden Operationen ein Körper ist.

(ii) Insbesondere ist das Nullelement bzgl. der Addition das Paar $(0,0)$. Das inverse Element von (a,b) bzgl. der Addition ist $(-a,-b)$.

(iii) Das Einselement bzgl. der Multiplikation ist $(1,0)$. Das inverse Element von $(a,b) \neq (0,0)$ bzgl. der Multiplikation ist $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$.

(iv) Man beachte weiters, dass $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ ist.

(v) Auf $\mathbb{C}$ kann **keine** Ordnungsrelation "$\leq$" erklärt werden, die in "erwünschter Weise" mit der Addition und der Multiplikation verträglich ist (wie es etwa bei $\mathbb{R}$ der Fall ist).

Wir betrachten nun die Teilmenge $\{(a,0) \ : \ a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$. Wegen $(a,0) + (c,0) = (a+c, 0)$ und $(a,0) \cdot (c,0) = (ac, 0)$ kann diese Teilmenge mit $\mathbb{R}$ "identifiziert" werden.

Im besonderen können durch $a \leftrightarrow (a,0)$ reelle und komplexe Zahlen addiert und multipliziert werden: $a + (c,d) \leftrightarrow (a,0) + (c,d) = (a+c,d)$ und $a \cdot (c,d) \leftrightarrow (a,0) \cdot (c,d) = (ac, ad)$.

Eine komplexe Zahl (a,b) wird oft mit z bezeichnet. Führt man für die komplexe Zahl $(0,1)$ das Symbol i ein, dann kann man schreiben

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + ib \; .$$

Für $z = a + ib$ heißt a der **Realteil** von z , und b der **Imaginärteil** von z , $a = \mathrm{Re}\, z$ und $b = \mathrm{Im}\, z$. Man beachte dass $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z \in \mathbb{R}$.

Wie zuvor hingewiesen, gilt dann $i^2 = -1$ bzw. $i = \sqrt{-1}$.

Addition und Multiplikation schreiben sich mit dieser Darstellung

- $(a+ib) \pm (c+id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$
- $(a+ib) \cdot (c+id) = (ac - bd) + i(ad - bc)$
- $\frac{a+ib}{c+di} = (a+ib) \cdot (c+id)^{-1} = (a+ib) \cdot (\frac{c}{c^2+d^2} + i\frac{-d}{c^2+d^2}) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}$
  (für $(c,d) \neq (0,0)$)

Definition. Zu $z = a + ib$ heißt $\overline{z} = a - ib$ die zu z **konjugiert komplexe Zahl**. Geometrisch entspricht dies einer Spiegelung an der x-Achse.

Bemerkungen.

(i) Für $z = a + ib$ ist $a = \mathrm{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $b = \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

(ii) $\overline{(\overline{z})} = z$, $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(iii) $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$

Definition. $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt der **Betrag** von $z = a + ib$.

Bemerkungen.

(i) Geometrisch betrachtet ist die (reelle) Zahl $|z|$ der Abstand von z

zum Ursprung.

(ii) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$

(iii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$

(iv) $|\text{Re } z| \leq |z|$, $|\text{Im } z| \leq |z|$, $|z| = |\overline{z}|$

(v) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis. zu (v) : Man überlege sich zuerst, dass

$\text{Re } (z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq |\text{Re } (z_1 \cdot \overline{z_2})| \leq |z_1 \cdot \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} =$

$= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} + z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_1|^2 + 2\text{Re } (z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq$

$\leq |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$

Daraus folgt dann $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. □

Der Betrag einer komplexen Zahl erfüllt die Eigenschaften einer Norm, und daraus kann durch $d(z, w) = |z - w|$ ein Abstandsbegriff (Metrik) gewonnen werden.

$\mathbb{C}$ ist dadurch ein metrischer Raum, und dies wiederum ermöglicht die Definition von konvergenten Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$. Man beachte dabei, dass eine ε-Kugel um einen Punkt z_0 , $K(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z_0 - z| < \varepsilon\}$, eine Kreisscheibe um z_0 mit Radius ε ist.

Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen heißt **konvergent** gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn $|z_n - z| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Geometrisch bedeutet dies, dass fast alle Folgenglieder in einer Kreisscheibe mit Radius ε um den Mittelpunkt z liegen.

Man beachte, dass sich zahlreiche Aussagen über reelle Reihen (wie etwa Wurzelkriterium und Quotientenkriterium) in geeigneter Weise auch auf komplexe Reihen übertragen lassen.

Im besonderen läßt sich für komplexe Potenzreihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ in gleicher Weise ein Konvergenzradius definieren. Der Konvergenzbereich ist dann hier i.a. eine offene Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt z_0 .

Bezüglich Folgen komplexer Zahlen sei erwähnt

Satz. Sei (z_n) eine Folge mit $z_n = x_n + iy_n$ und $z = x + iy$. Dann gilt $z_n \to z \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to x$ und $y_n \to y$.

Beweis.
" $\Rightarrow$ " : Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $|z_n - z| < \varepsilon$ für fast alle n , und damit auch $|x_n - x| = |\mathrm{Re}\,(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$ und
$|y_n - y| = |\mathrm{Im}\,(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$ für fast alle n .

" $\Leftarrow$ " : Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ und $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ für fast alle n . Folglich ist $|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = \sqrt{|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$ für fast alle n . $\square$

Wie schon gesagt, können wir uns die komplexen Zahlen als Elemente des $\mathbb{R}^2$ vorstellen, weshalb man auch von der **komplexen Zahlenebene** spricht.

Dies führt auch zu einer weiteren Darstellungsmöglichkeit, der **trigonometrischen Darstellung** .

Sei $z = x + iy \neq 0$. Mit $r = |z|$ und $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ ergibt sich $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wobei $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ für $x \neq 0$.

Aus Schulkenntnissen über die Eigenschaften der Winkelfunktionen kann dann leicht für $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sowie

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

gezeigt werden:

- $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ (mittels vollständiger Induktion)

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad$ (für $z_2 \neq 0$)
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n})) \quad k = 0, 1, ..., n-1$

Bemerkungen. Man beachte, dass sich bei der Multiplikation (bzw. Division) von zwei komplexen Zahlen die Winkel addieren (bzw. subtrahieren).

Des weiteren besitzt eine komplexe Zahl $z \neq 0$ n verschiedene Wurzeln.

Beispiel. Man bestimme $\sqrt[3]{i}$.

Für $z = i$ gilt $r = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Zudem ist hier $n = 3$.

Für $k = 0, 1, 2$ ist $\varphi_k = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$, also $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$, $\varphi_3 = \frac{3\pi}{2}$.

Damit ist (mit $\sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{1} = 1$)

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} = -i$$