Stetige Funktionen

Abbildungen $f : X \to Y$, wobei X und Y strukturierte Mengen sind (wie z.B. Vektorräume oder metrische Räume), spielen eine zentrale Rolle in der Mathematik. In der Analysis sind Abbildungen mit besonderen Eigenschaften wie etwa "stetig" oder "differenzierbar" von vorrangigem Interesse.

Bei der Eigenschaft, dass eine Abbildung "stetig in einem Punkt x_0" ist, geht es darum, der Idee, "wenn x 'nahe' bei x_0 ist, dann soll $f(x)$ 'nahe' bei $f(x_0)$ sein", ein präzise mathematische Bedeutung zu geben.

Definition. Seien (X, d) und (Y, ϱ) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. $D(f) \subseteq X$ sei der Definitionsbereich von f .

i) f heißt **stetig in** x_0 $(x_0 \in D(f))$, wenn

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_\varepsilon > 0$ sodass $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; \varrho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$

ii) f heißt **stetig auf** $X_0 \subseteq D(f)$, wenn f stetig in allen Punkten $x_0 \in X_0$ ist.

Bemerkungen.

(i) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist somit genau dann stetig in $x_0 \in D(f)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein zugehöriges $\delta_\varepsilon > 0$ gibt (δ_ε hängt von ε und x_0 ab !) sodass für alle $x \in D(f)$ mit $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon$ gilt, dass $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

In anderen Worten: Wird ein beliebiges ε-Intervall um $f(x_0)$ vorgegeben, dann existiert dazu ein δ_ε-Intervall um x_0 , welches zur Gänze in das ε-Intervall um $f(x_0)$ abgebildet wird.

(ii) Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in $z_0 \in D(f)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein zugehöriges $\delta_\varepsilon > 0$ gibt sodass für alle $z \in D(f)$ mit $|z_0 - z| < \delta_\varepsilon$ gilt, dass $|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$.

In anderen Worten: Wird eine beliebige ε-Kreisscheibe um $f(z_0)$ vorgegeben, dann existiert dazu eine δ_ε-Kreisscheibe um z_0 , welche zur Gänze in die ε-Kreisscheibe um $f(z_0)$ abgebildet wird.

Die Stetigkeit in einem Punkt x_0 kann nun mittels konvergenter Folgen charakterisiert werden.

Satz. Seien (X, d) und (Y, ϱ) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) f ist stetig in x_0 ,

2) für **jede** Folge mit $x_n \to x_0$ gilt dass $f(x_n) \to f(x_0)$.

Beweis.
1) $\Rightarrow$ 2) : Gelte $x_n \to x_0$ und sei $\varepsilon > 0$. Laut Voraussetzung gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \varrho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Weil $x_n \to x_0$ gibt es eine Zahl N_{δ_ε} sodass $d(x_0, x_n) < \delta_\varepsilon$ für $n > N_{\delta_\varepsilon}$.

Damit gilt aber $\varrho(f(x_0), f(x_n)) < \varepsilon$ für $n > N_{\delta_\varepsilon}$, i.e. $f(x_n) \to f(x_0)$.

2) $\Rightarrow$ 1) : Annahme: f sei **nicht** stetig in x_0 .

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass es für jedes $\delta > 0$ einen Punkt x_δ gibt mit $d(x_0, x_\delta) < \delta$, aber $\varrho(f(x_0), f(x_\delta) \geq \varepsilon$.

Im besonderen (setze jeweils $\delta = \frac{1}{n}$) gibt es damit eine Folge (x_n) mit $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$ aber $\varrho(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$.

Damit gilt $x_n \to x_0$ aber $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$, ein Widerspruch. Also ist f stetig in x_0 . $\square$

Einfache Beispiele.

1) Die **konstante Funktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \;\; \forall\, x$ ist stetig (also stetig in jedem x_0).

2) Die **identische Funktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \;\; \forall\, x$ ist stetig (also stetig in jedem x_0).

Satz. (Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig)

Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen, wobei X , Y , Z metrische Räume sind und $f(X) \subseteq D(g)$ gilt.

Ist dann f stetig in $x_0 \in D(f)$ und g stetig in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x_0 .

Beweis.

Gelte $x_n \to x_0$. Weil f stetig in x_0 ist, gilt $f(x_n) \to f(x_0)$. Weil g stetig in $f(x_0)$ ist, gilt dann weiters $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$, also $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. $\square$

Eine Überlegung.

Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Wegen $x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; x_n^2 \to x_0^2$ ist f in allen $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Zu $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es also ein $\delta_\varepsilon(x_0) > 0$ mit der Eigenschaft $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon(x_0) \;\Rightarrow\; |x_0^2 - x^2| < \varepsilon$.

Fixiert man ε , dann ist zu erwarten, dass $\delta_\varepsilon(x_1)$ kleiner zu wählen ist, wenn $|x_1| > |x_0|$.

Die Frage ist nun, ob man ein "Universal-δ_ε" finden kann, welches für alle Punkte (bzw. für alle Punkte eines bestimmten Bereiches) das Gewünschte leistet. Dies führt zum Begriff der "gleichmäßigen Stetigkeit" .

Definition. Sei $f : X \to Y$, wobei (X, d) und (Y, ϱ) metrische Räume sind.

Dann heißt f **gleichmäßig stetig** auf $X_0 \subseteq D(f)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein "Universal-δ_ε" $\delta_\varepsilon > 0$ existiert sodass $d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; \varrho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Bemerkungen.

1) Man mache sich den Unterschied zwischen "Stetigkeit" und "gleichmäßiger Stetigkeit" klar !

2) Gleichmäßige Stetigkeit ist stets bezogen auf eine Teilmenge (und nicht auf einen Punkt).

3) Klarerweise gilt : f gleichmäßig stetig auf $X_0 \;\Rightarrow\; f$ stetig in jedem $x_0 \in X_0$.

Aber: $f(x) = x^2$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, aber dort nicht gleichmäßig stetig (Aufgabe).

Der folgende **sehr wichtige** Satz streicht die Bedeutung von kompakten Mengen hervor und wird eventuell zu einem späteren Zeitpunkt gezeigt.

Satz. Seien (X, d) und (Y, ϱ) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig auf $X_0 \subseteq D(f)$.

1) Ist X_0 kompakt, dann ist auch $f(X_0)$ kompakt.

2) Ist X_0 kompakt, dann ist f auch gleichmäßig stetig auf X_0 .

Bemerkung. $f(x) = x^2$ ist **nicht** gleichmäßig stetig auf $X_0 = \mathbb{R}$, aber gleichmäßig stetig auf z.B. einem kompakten Intervall $X_0 = [a, b]$.

Für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) auf einem metrischen Raum X können nun in naheliegender Weise algebraische Operationen wie Summe, Produkt und Quotient von Funktionen definiert werden.

- $f \pm g :$ $\quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $f \cdot g :$ $\quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} :$ $\quad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Dabei ist $D(f \pm g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$ und

$D(\frac{f}{g}) = D(f) \cap \{x \in D(g) \;:\; g(x) \neq 0\}$.

Satz. Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig in $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, dann auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) .

Beweis. Für $f \cdot g$: $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ und $g(x_n) \to g(x_0) \Rightarrow f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(x_0) \cdot g(x_0)$. Also $(f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(x_0)$. $\square$

Aus dem vorhergehenden Satz folgt sofort, dass die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^n$, $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Des weiteren ist $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2-3}$ stetig in allen $x \neq \pm\sqrt{3}$.

Bemerkung. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $f(x_0) \neq 0$, dann existiert ein $\delta > 0$ sodass für alle $x \in K(x_0, \delta)$ gilt dass $f(x) \neq 0$. (Aufgabe!)

Damit ist in diesem Fall gewährleistet, dass die Funktion $\frac{1}{f}$ zumindest auf einer δ-Kugel um x_0 erklärt ist.

Bemerkung. (Annäherung entlang von Richtungen)

Ist $x_0 \in \mathbb{R}$, dann kann sich eine reelle Folge grundsätzlich nur von zwei Richtungen (von links oder von rechts) an x_0 annähern. Ist hingegen $z_0 \in \mathbb{C}$, dann gibt es unendlich viele Mglichkeiten der Annäherung entlang von Richtungen.

Dementsprechend kann für Funktionen $f : \mathbb{R} \to Y$ kann die sogenannte "einseitige Stetigkeit" erklärt werden.

Dabei heißt f **linksseitig (**bzw. **rechtsseitig) stetig in** x_0, wenn gilt:

$\forall\ (x_n)$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n \leq x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ bzw.

$\forall\ (x_n)$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n \geq x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$

Bemerkung. Offenbar ist $f : \mathbb{R} \to Y$ genau dann stetig in x_0 , wenn f linksseitig und rechtsseitig stetig in x_0 ist.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$ ist linksseitig stetig in $x_0 = 0$, aber nicht rechtsseitig stetig.

Für Funktionen lassen sich auch geeignete Beschränktheitsbegriffe erklären.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1) $f : X \to \mathbb{R}$ heißt auf $X_0 \subseteq D(f)$ **nach oben (bzw. nach unten) beschränkt**, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit $f(x) \leq M$ (bzw. $f(x) \geq M$) für alle $x \in X_0$.

2) $f : X \to \mathbb{R}$ heißt auf $X_0 \subseteq D(f)$ **beschränkt**, wenn f sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, d.h. wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in X_0$.

3) $f : X \to \mathbb{C}$ heißt auf $X_0 \subseteq D(f)$ **beschränkt**, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in X_0$.

Bemerkungen.

(i) Sind f, g beschränkt auf X_0 , dann auch $f \pm g$ und $f \cdot g$.

(ii) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ auf $X_0 \subseteq X$ beschränkt. Dann existieren $\sup\limits_{x \in X_0} f(x)$ und $\inf\limits_{x \in X_0} f(x)$, müssen aber nicht auf X_0 angenommen werden.

Betrachte etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und $X_0 = (0, 1)$. Dann ist $\sup\limits_{x \in X_0} f(x) = 1$ und $\inf\limits_{x \in X_0} f(x) = 0$. Diese werden jedoch auf X_0 nicht angenommen.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$. Dann hat f an der Stelle $x_0 \in X_0 \subseteq D(f)$ ein

i) **absolutes Maximum auf** X_0 , wenn $\forall\, x \in X_0 \;\; f(x) \leq f(x_0)$.

ii) **absolutes Minimum auf** X_0 , wenn $\forall\, x \in X_0 \;\; f(x) \geq f(x_0)$.

iii) $x_0 \in X_0 \subseteq D(f)$ heißt **Nullstelle** wenn $f(x_0) = 0$.

Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf X_0 . Ist X_0 **kompakt**, dann hat f auf X_0 ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

Beweis. Laut vorherigem Satz ist $f(X_0)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, also beschränkt und abgeschlossen. Damit gilt $\exists \sup\limits_{x \in X_0} f(x)$, $\inf\limits_{x \in X_0} f(x)$ und $\sup\limits_{x \in X_0} f(x)$, $\inf\limits_{x \in X_0} f(x) \in f(X_0)$ (weil $f(X_0)$ abgeschlossen ist) . $\square$

Häufig interessiert man sich allerdings lediglich für das lokale Verhalten von f in einer Umgebung von x_0 .

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, $X_0 \subseteq X$ und $f : X \to \mathbb{R}$.

(i) $U(x_0) \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x_0 , wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $K(x_0, \delta) \subseteq U(x_0)$.

(ii) f hat an der Stelle x_0 ein **relatives Maximum auf** X_0, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall\, x \in X_0 \cap U(x_0)$

(iii) f hat an der Stelle x_0 ein **relatives Minimum auf** X_0, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt mit $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall\, x \in X_0 \cap U(x_0)$

Grenzwerte von Funktionen.

Häufig tauchen in der Mathematik Ausdrücke der Form $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ auf. Derartigen Ausdrücken wollen wir jetzt eine präzise Bedeutung zuweisen.

Definition. $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ wenn für **jede (!!)** Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to b$.

Ist $b \in \mathbb{R}$, dann heißt b **eigentlicher Grenzwert von f an der Stelle** x_0 . Für $b = +\infty$ bzw. $b = -\infty$ spricht man von einem **uneigentlichen Grenzwert** von f an der Stelle x_0 .

In dieser Definition sind auch die Möglichkeiten $x_0 = +\infty$ bzw. $x_0 = -\infty$ inkludiert und liefern $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Bemerkung. Man beachte, dass bei dieser Definition die Funktion f an der Stelle x_0 gar nicht definiert zu sein braucht.

Beispiele.

1) Sei $f(x) = \frac{x^m - a^m}{x-a}$. f ist an der Stelle $x_0 = a$ nicht definiert.

Sei nun $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Dann ist

$f(x_n) = \frac{x_n^m - a^m}{x_n - a} = \frac{(x_n-a)(x_n^{m-1}+x_n^{m-2}a+...+x_n a^{m-2}+a^{m-1})}{x_n-a} =$

$x_n^{m-1} + x_n^{m-2}a + ... + x_n a^{m-2} + a^{m-1} \to m a^{m-1}$.

Damit ist $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x-a} = m a^{m-1}$.

2) Betrachte $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sei $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall\, n$. Dann gilt $x_n \to 0$ und $f(x_n) = n \to +\infty$.

Sei $x_n = -\frac{1}{n}$ $\forall\, n$. Dann gilt $x_n \to 0$ und $f(x_n) = -n \to -\infty$.

Dies bedeutet, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **nicht** existiert.

Man überlege sich andererseits, dass für jede Folge $x_n \to +\infty$ (bzw. $x_n \to -\infty$) gilt: $f(x_n) \to 0$, also $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Für auf $\mathbb{R}$ definierte Funktionen $f : \mathbb{R} \to Y$ kann wiederum der "linksseitige Grenzwert" und der "rechtsseitige Grenzwert" betrachtet werden.

Definition.

1) $b = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ wenn für **jede** Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to b$.

Ist $b \in \mathbb{R}$, dann heißt b eigentlicher **linksseitiger** Grenzwert von f an der Stelle x_0 . Für $b = +\infty$ bzw. $b = -\infty$ spricht man von einem uneigentlichen **linksseitigen** Grenzwert von f an der Stelle x_0 .

2) $b = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ wenn für **jede** Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$, $x_0 < x_n$ gilt, dass $f(x_n) \to b$.

Ist $b \in \mathbb{R}$, dann heißt b eigentlicher **rechtsseitiger** Grenzwert von f an der Stelle x_0 . Für $b = +\infty$ bzw. $b = -\infty$ spricht man von einem uneigentlichen **rechtsseitigen** Grenzwert von f an der Stelle x_0 .

Damit ergeben sich sofort folgende Beobachtungen:

1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \;\Leftrightarrow\; \exists \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \;\; \exists \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

2) f ist stetig in $x_0 \;\Leftrightarrow\; \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3) f ist linksseitig stetig in $x_0 \;\Leftrightarrow\; \exists \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

4) f ist rechtsseitig stetig in $x_0 \;\Leftrightarrow\; \exists \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Beispiel. Betrachte $f(x) = \begin{cases} x + \frac{x}{|x|} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$.

Dann ist $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, also ist f rechtsseitig stetig.

Beobachtung. Es gelte $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = b \in \mathbb{R}$.

Dann sagt man, dass f an der Stelle x_0 **"stetig ergänzt"** werden kann. Wenn der Funktionswert an der Stelle x_0 gleich b gesetzt wird, erhält man eine in x_0 stetige Funktion.

Beispiel. Sei $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Dann ist f an der Stelle $x_0 = 1$ nicht definiert.

Für $x \neq 1$ gilt allerdings $f(x) = x + 1$. Somit kann f an der Stelle $x_0 = 1$ durch die Setzung $f(1) = 2$ stetig ergänzt werden.

Zwischenwerteigenschaften stetiger Funktionen.

Es scheint intuitiv klar zu sein, dass eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, bei der $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliches Vorzeichen besitzen, an einer Zwischenstelle des Intervalls eine Nullstelle haben muß. Dies ist allerdings nicht ganz trivial und beruht auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Satz. (**Nullstellensatz** von Bolzano)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a)f(b) < 0$ (d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben unterschiedliches Vorzeichen).

Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$, i.e. f hat in (a, b) mindestens eine Nullstelle.

Beweis. oBdA sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Wir setzen $I_0 = [a, b]$. Durch Halbierung von I_0 erhalten wir zwei Teilintervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}, b]$, von denen bei einem, etwa $I_1 = [a_1, b_1]$, gilt $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ gilt.

Durch fortwährende Intervallhalbierung erhalten wir eine Folge $I_n = [a_n, b_n]$ von Intervallen mit $I_{n+1} \subseteq I_n$, $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ und $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$.

Offenbar ist die Folge (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt (durch b) , (b_n) ist monoton fallend und nach unten beschränkt (durch a) . Also sind beide Folgen konvergent. Man überlege sich, dass die Grenzwerte gleich sein müssen, i.e. $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

Wir wollen nun zeigen, dass $f(\xi) = 0$. Dazu nehmen wir an, dass $f(\xi) = \alpha > 0$ (analog wird die Annahme $f(\xi) < 0$ behandelt) . Weil f stetig in $x_0 = \xi$ ist, gibt es zu $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\alpha}{2}$ für alle $|x - \xi| < \delta$.

Wegen $-\frac{\alpha}{2} < f(x) - f(\xi) < \frac{\alpha}{2}$ gilt $f(x) > \frac{\alpha}{2}$ für alle $|x - \xi| < \delta$. Andererseits, weil $a_n \to \xi$, $\exists\, n$ mit $|a_n - \xi| < \delta$, und somit $f(a_n) > \frac{\alpha}{2} > 0$, ein Widerspruch.

Damit muß $f(\xi) = 0$ sein. $\square$

Dieser Satz läßt sich nun in einfacher Weise erweitern zum sogenannten Zwischenwertsatz.

Satz. (**Zwischenwertsatz**)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Für $a < b \in \mathbb{R}$ gelte dass $f(a) \neq f(b)$, etwa $f(a) < f(b)$ (analog wird der Fall $f(a) > f(b)$ behandelt).

Dann gibt es für ein beliebiges η mit $f(a) < \eta < f(b)$ ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \eta$, d.h. jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird angenommmen.

Beweis. Sei $g(x) = f(x) - \eta$. Dann ist g stetig auf $[a, b]$ mit $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Nach dem Nullstellensatz existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(\xi) = 0$, i.e. $f(\xi) = \eta$. $\square$

Folgerung. Das stetige Bild eines Intervalls ist wieder ein Intervall.

Monotone Funktionen.

Definition. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt auf $X \subseteq D(f)$

i) **monoton wachsend** (bzw. streng monoton wachsend), wenn

$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$)

ii) **monoton fallend** (bzw. streng monoton fallend), wenn

$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$)

ii) **monoton** (bzw. streng monoton), wenn f entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Bemerkung. Monotone Funktionen haben die Eigenschaft, dass stets linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert existieren, i.e. ist f auf dem Intervall (a, b) definiert und dort monoton, dann existieren $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ für jedes $x_0 \in (a, b)$.

Daraus folgt, dass monotone Funktionen als Unstetigkeitsstellen nur Sprungstellen haben können.

Die besondere Bedeutung monotoner Funktionen zeigt sich an der Frage der Existenz der Umkehrfunktion.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ **streng** monoton. Dann ist f offenbar injektiv. Bezeichnen wir mit $B(f)$ den Bildbereich von f , dann ist $f : A \to B(f)$ bijektiv.

Also existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : B(f) \to A$.

Sei etwa f streng monoton wachsend , $y_1, y_2 \in B(f)$ mit $y_1 < y_2$. Wir setzen $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Wäre $x_1 \geq x_2$, dann $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, also muß $x_1 < x_2$ sein und somit ist f^{-1} ebenfalls streng monoton wachsend.

(Analog zeigt man, dass die Umkehrfunktion einer streng monoton fallenden Funktion wieder streng monoton fallend ist.)

Satz. Sei f stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend) auf $X \subseteq \mathbb{R}$.

Ist X kompakt, dann ist f^{-1} stetig auf $f(X)$.

Beweis.

Sei $y_0 \in f(X)$ und (y_n) eine Folge in $f(X)$ mit $y_n \to y_0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $x_0, x_n \in X$ mit $f(x_0) = y_0$ und $f(x_n) = y_n$, i.e. $x_0 = f^{-1}(y_0)$ und $x_n = f^{-1}(y_n)$.

Annahme: (x_n) konvergiert **nicht** gegen x_0 . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $|x_0 - x_{n_k}| \geq \varepsilon$. Weil X kompakt ist, hat (x_{n_k}) einen Häufungspunkt $x \in X$ (Bolzano-Weierstrass) . Also gibt es eine Teilfolge $(x_{n_{k_i}})$ von (x_{n_k}) mit $x_{n_{k_i}} \to x$.

Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $y_{n_{k_i}} = f(x_{n_{k_i}}) \to f(x)$. Weil weiters $y_{n_{k_i}} \to y_0$, gilt $y_0 = f(x)$ und damit $x = x_0$, ein Widerspruch.

Damit gilt $x_n = f^{-1}(y_n) \to x_0 = f^{-1}(y_0)$, i.e. f^{-1} ist stetig. $\square$

Bemerkung. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist $B(f)$, der Bildbereich von f , wieder ein offenes (!) Intervall.

Man kann zeigen, dass in diesem Fall die Umkehrfunktion $f^{-1} : B(f) \to (a,b)$ ebenfalls stetig ist.