Die elementaren Funktionen (Überblick)

Zu den elementaren Funktionen zählen wir die Potenz- und die Exponentialfunktion, den Logarithmus, sowie die hyperbolischen und die trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen.

I. Die Potenzfunktion

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Potenz von x durch $x^n = \prod_{k=1}^{n} x = x \cdot x \cdot ... \cdot x$ (n-mal) definiert.

Diese Definition soll nun in geeigneter Weise auf verallgemeinert werden.

Für $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$ setzen wir $x^0 = 1$,

$$x^m = \prod_{k=1}^{m} x \text{ , wenn } m > 0 \text{ ,}$$

$$x^m = \frac{1}{x^{-m}} \text{ , wenn } m < 0 \text{ und } x \neq 0 \text{ .}$$

x heißt dabei **Basis** , m der **Exponent** .

Im nächsten Schritt kann für $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ kann die **n-te Wurzel** $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ erklärt werden.

Betrachte $f(x) = x^n$ mit $D(f) = [0, \infty)$. f ist auf $D(f)$ stetig und streng monoton wachsend. Daher existiert auf $B(f)$ die Umkehrfunktion f^{-1} . Sie ist wieder stetig und streng monoton wachsend.

Wir setzen $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Bemerkung. Falls n **ungerade** ist, ist die Funktion $f(x) = x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und streng monoton steigend, und es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, d.h. in diesem Fall existiert auch die n-te Wurzel aus einer negativen Zahl.

Für $0 < x \in \mathbb{R}$ und $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z}\ ,\ q \in \mathbb{N})$ ist $x^r = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$.
Dabei ist x^r unabhängig von der Darstellung von r .

Für $0 < x \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist schließlich $x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{r_n}$, wobei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit $r_n \to \alpha$ ist.

Man kann zeigen, dass x^α tatsächlich wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der gewählten Folge $r_n \to \alpha$.

Die Funktion $f(x) = x^\alpha$ mit $D(f) = (0, \infty)$ heißt **Potenzfunktion** .

Sie hat folgende Eigenschaften :

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad , \quad x^\alpha y^\alpha = (x \cdot y)^\alpha \quad , \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\cdot\beta}$$

$$x < y \;\Leftrightarrow\; x^\alpha < y^\alpha \quad , \quad \alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; x^\alpha < x^\beta \quad , \quad x > 1$$

II. Die Exponentialfunktion

Zuvor wurde x^α für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert. Wir können nun auch x "fest lassen" und α als "Variable" nehmen.

Durch offensichtliche Umbenennung erhalten wir damit die Funktion

$$f(x) = a^x \quad , \quad a > 0\ ,\ x \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{also} \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$f(x)$ heißt **Exponentialfunktion** .

Satz. (Ohne Beweis) $f(x) = a^x$ ist stetig.

Wiederum kann man zeigen, dass die erwünschten Eigenschaften tatsächlich erfüllt sind :

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad , \quad a^x b^x = (a \cdot b)^x \quad , \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$x < y \;\Leftrightarrow\; a^x < a^y \quad \text{für} \quad a > 1$$

III. Der Logarithmus

Die Funktion $f(x) = a^x$ $(1 < a \in \mathbb{R})$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und dort stetig und streng monoton wachsend.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} b^{-n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = +\infty$ und der Monotonie folgt:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \text{und damit} \quad B(f) = (0,\infty) \ .$$

Somit existiert auf $(0,\infty)$ die Umkehrfunktion f^{-1}, welche dort stetig und streng monoton wachsend ist.

Definition. Sei $1 < a \in \mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktion von $f(x) = a^x$ heißt **Logarithmus zur Basis** a .

Schreibweise: $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Offenbar ist $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung.

Seien $x, y > 0$. Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion erhalten wir nun

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$, $\log_a a = 1$
- $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Es erweist sich als vorteilhaft, als Basis der Exponentialfunktion $b = e$ zu wählen. Dann heißt $\log_e x = \ln x$ der **natürliche Logarithmus** und e^x die natürliche Exponentialfunktion.

Wir vermerken noch zwei Ergebnisse.

Satz. (Ohne Beweis)
Sei (x_n) eine Folge mit $0 < |x_n| < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to 0$.

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Satz. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$.

Beweis. Der Fall $x = 0$ ist klar, sei also $x \neq 0$. Bei festem x gilt für $x_n = \frac{x}{n}$, dass $0 < |x_n| < 1$ für fast alle n und $x_n \to 0$.

Damit ist mit dem vorhergehenden Satz $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^{\frac{n}{x}} = e$ bzw.

$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1 + \frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}\right]^x = (\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^{\frac{n}{x}})^x = e^x$. $\square$

IV. Die hyperbolischen Funktionen

Definition.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

heißt **Sinus hyperbolicus** . Es gilt $D(f) = B(f) = \mathbb{R}$.

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

heißt **Cosinus hyperbolicus** . Es gilt $D(f) = \mathbb{R}$, $B(f) = [1, \infty)$.

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$

heißt **Tangens hyperbolicus** . Es gilt $D(f) = \mathbb{R}$, $B(f) = (-1, 1)$.

iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x$

heißt **Cotangens hyperbolicus** . Es gilt

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B(f) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ |y| > 1\}$.

Satz.

1) $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$ sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig.

2) $\sinh x$ und $\tanh x$ sind für $x \in \mathbb{R}$ monoton wachsend, $\cosh x$ hat für $x < 0$ und $x > 0$ unterschiedliches Monotonieverhalten, und $\coth x$ ist sowohl für $x < 0$ als auch für $x > 0$ monoton fallend.

3) Für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x > 0$ oder $x < 0$ ($\cosh x$ und $\coth x$) besitzen die hyperbolischen Funktionen eine Umkehrfunktion.

Diese werden mit $\text{arsinh}x$, $\text{arcosh}x$, $\text{artanh}x$ und $\text{arcoth}x$ bezeichnet.

Satz.

1) $\text{arsinh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$

2) $\text{arcosh}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \geq 1$

3) $\text{artanh}x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, $-1 < x < 1$

4) $\text{arcoth}x = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$, $x > 1$ oder $x < -1$

Beweis. (für $\text{arsinh}x$)

$f(x) = \text{sinh}x = y$, f^{-1} entsteht aus f durch Spiegelung an der Geraden $y = x$, d.h. Vertauschung von x und y .

$\Rightarrow \quad x = \text{sinh}y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Rightarrow \quad e^y - 2x - e^{-y} = 0$ bzw. $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$.

(Quadratische Gleichung für e^y) $\quad \Rightarrow \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$.

Die Lösung $e^y = x - \sqrt{x^2+1}$ entfällt, weil $e^y > 0$, also $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. $\square$

Weitere Eigenschaften. (Beweis zur Übung)

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(ii) $\sinh(x_1 + x_2) = \text{sinh}x_1 \text{cosh}x_2 + \text{cosh}x_1 \text{sinh}x_2$

(iii) $\cosh(x_1 + x_2) = \text{cosh}x_1 \text{cosh}x_2 + \text{sinh}x_1 \text{sinh}x_2$

(iv) $\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{\text{cosh}x + 1}{2}$

(v) $\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\text{cosh}x - 1}{2}$

IV. Die trigonometrischen Funktionen

Die Winkelfunktionen können auf unterschiedliche Art und Weise eingeführt werden. Wir wählen einen etwas "unüblichen" Zugang.

Man kann zeigen (allerdings erst, wenn der Bogenlänge zur Verfügung steht), dass es **genau ein** Paar von Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sin x$ und $f_2(x) = \cos x$, genannt **Sinus** bzw. **Cosinus** , gibt, welche nachfolgenden Bedingungen genügen :

(i) $\sin x$, $\cos x$ sind auf $\mathbb{R}$ definiert und dort stetig,

(ii) $\sin x$ ist auf $\mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, $\cos x$ ist auf $\mathbb{R}$ eine gerade Funktion, d.h. $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$,

(iii) $\begin{array}{l} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{array}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

(v) $\cos 0 = 1$.

Des weiteren kann man zeigen.

Satz.

(i) $\sin x$ besitzt einfache Nullstellen bei $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\cos x$ besitzt einfache Nullstellen bei $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\sin x$ und $\cos x$ sind periodisch mit der Periode 2π , d.h. $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ und $\cos x = \cos(x + 2k\pi) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Definition. Die Funktionen

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$ bzw.

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$

heißen **Tangens** bzw. **Cotangens** .

Satz.

1) $\sin x$ besitzt auf der Bildmenge von $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eine Umkehrfunktion, genannt $\arcsin x$,

2) $\cos x$ besitzt auf der Bildmenge von $(0, \pi)$ eine Umkehrfunktion, genannt $\arccos x$,

3) $\tan x$ besitzt auf der Bildmenge von $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eine Umkehrfunktion, genannt $\arctan x$,

4) $\cot x$ besitzt auf der Bildmenge von $(0, \pi)$ eine Umkehrfunktion, genannt $\operatorname{arccot} x$.