Extrema, Wendepunkte und Konvexität

Das Kriterium von Fermat (wenn ein lokales Extremum an x_0 vorliegt, dann muß $f'(x_0) = 0$ sein) liefert lediglich ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines (lokalen) Extremums. Durch $f'(x_0) = 0$ können folglich die Kandidaten für ein lokales Extremum gewonnen werden.

Das Kriterium von Fermat ist allerdings **nicht** hinreichend, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt. Es ist zwar $f'(0) = 0$, aber an der Stelle $x_0 = 0$ liegt kein lokales Extremum vor.

Satz. Sei $f(x)$ n-mal stetig differenzierbar auf (a, b) . Weiters sei $x_0 \in (a, b)$ und $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- Ist n gerade, dann hat f an x_0 ein Extremum, und zwar ein Minimum, wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$ bzw. ein Maximum, wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$.
- Ist n ungerade, dann hat f an x_0 kein Extremum.

Beweis.
In einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gilt nach dem Satz von Taylor

$$f(x) = T_{n-1}(x, x_0) + R_{n-1}(x, x_0) = f(x_0) + \tfrac{f^{(n)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{n!}(x - x_0)^n \ .$$

Falls n gerade ist, ist stets $(x - x_0)^n \geq 0$. In einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 gilt dann

$$f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)) > 0 \ \Rightarrow \ f(x) \geq f(x_0) \ \text{... Minimum, oder}$$

$$f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)) < 0 \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(x_0) \ \text{... Maximum .}$$

Falls n ungerade ist, wechselt $(x-x_0)^n$ das Vorzeichen, $f^{(n)}(x_0+\vartheta(x-x_0))$ aber nicht. Daher liegt in diesem Fall kein Extremum vor. $\square$

Bemerkungen. i) Ist $f(x)$ beliebig oft differenzierbar in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und $f^{(n)}(x_0) = 0 \ \forall \ n$, dann ist keine Aussage möglich.

ii) Werden Extrema auf $[a,b]$ gesucht, dann kommen lokale Extrema **und** Randextrema in Frage.

Beispiel. Betrachte $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5$.

Dann ist $f'(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ und $f''(x) = 2x + 1$.

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$, $x_2 = -2$

$f''(x_1) = 3 > 0$, $f''(x_2) = -3 < 0$ sowie $f(x_1) = \frac{23}{6}$, $f(x_2) = \frac{25}{3}$.

Also liegt in $P_1(1, \frac{23}{6})$ ein lokales Minimum vor und in $P_2(-2, \frac{25}{3})$ ein lokales Maximum.

Beschränken wir uns auf das Intervall $[-6,3]$, dann gilt $f(-6) = -37$ und $f(3) = \frac{25}{2}$.

Also liegt im linken Randpunkt ein globales Minimum (bzgl. $[-6,3]$) und im rechten Randpunkt ein globales Maximum (bzgl. $[-6,3]$) vor.

Defintion. Sei $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar auf (a,b) und sei

$f''(x) < 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f''(x) > 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ **oder**

$f''(x) > 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f''(x) < 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Dann heißt x_0 ein **Wendepunkt** von $f(x)$.

Bemerkung. Ist $f(x)$ dreimal stetig differenzierbar auf (a,b) , dann lautet die Bedingung für einen Wendepunkt offenbar $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Monotone Funktionen besitzen ein spezielles Änderungsverhalten. Dieses läßt sich noch weiter beschreiben, wenn z.B. neben $f(x)$ auch noch $f'(x)$ monoton ist.

Definition. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $\forall\, \lambda \in (0,1)$ und $x_1, x_2 \in I$ gelte

i) $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$.

Dann heißt $f(x)$ **konvex** auf I (**streng konvex**, falls "$<$") .

ii) $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$.

Dann heißt $f(x)$ **konkav** auf I (**streng konkav**, falls "$>$") .

Bemerkung. Sei $x_1 < x_2$. Dann durchläuft $x(\lambda) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ das Intervall (x_1, x_2) , falls λ das Intervall $(0,1)$ durchläuft.

Mit $y(\lambda) = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) = f(x_1) + \lambda(f(x_2) - f(x_1)) =$

$= f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x(\lambda) - x_1)$ gilt :

$(x(\lambda), y(\lambda))$ durchläuft dabei das Geradenstück σ zwischen $P_1 = (x_1, f(x_1))$ und $P_2 = (x_2, f(x_2))$.

Falls $f(x)$ **konvex** ist, liegt der Graph von $f(x)$ in (x_1, x_2) stets **unterhalb** von σ . Dann gilt

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) \ .$$

Falls $f(x)$ **konkav** ist, liegt der Graph von $f(x)$ in (x_1, x_2) stets **oberhalb** von σ . Dann gilt

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) \ .$$

Satz. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Wenn $f'(x)$ auf (a,b) wächst (bzw. fällt), dann ist $f(x)$ konvex (bzw. konkav) auf (a,b) .

(Bei strengem Wachsen bzw. Fallen von $f'(x)$ ist $f(x)$ streng konvex bzw. streng konkav.)

Beweis. (für $f'(x)$ monoton wachsend)

Sei $x_1 < x_2$, und setze $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$.

Zu zeigen : für $\lambda \in (0,1)$ ist

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(x) = f(x) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad \text{bzw.}$$

$$(1-\lambda) \cdot (f(x) - f(x_1)) \leq \lambda \cdot (f(x_2) - f(x))$$

Nach dem 1. MWS ist

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x - x_1) \quad , \quad \xi_1 \in (x_1, x) \quad \text{und}$$

$$f(x_2) - f(x) = f'(\xi_2)(x_2 - x) \quad , \quad \xi_2 \in (x, x_2)$$

Also ist zu zeigen $\quad (1-\lambda)f'(\xi_1)(x - x_1) \leq \lambda f'(\xi_2)(x_2 - x)$.

Dies ist aber eine wahre Aussage, weil $\xi_1 < \xi_2$, f' monoton wächst und

$(1-\lambda)(x - x_1) = \lambda(x_2 - x) > 0$

(weil $(1-\lambda)x + \lambda x = x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$) . $\square$

Satz. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

i) $f''(x) \geq 0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ ist konvex.

ii) $f''(x) \leq 0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ ist konkav.

(Gilt $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ auf (a,b), dann ist $f(x)$ streng konvex bzw. streng konkav)

Beweis. (für i))

Ist $f''(x) \geq 0$ auf (a,b) , dann wächst $f'(x)$ monoton auf (a,b) . Aus dem Satz zuvor folgt die Konvexität. $\square$

Beispiele.

1) $f(x) = \ln x$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\Rightarrow$ $\ln x$ ist konkav auf $(0,\infty)$.

2) $f(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$ $\Rightarrow$ e^x ist konvex auf $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5$, $f''(x) = 2x + 1$ $\Rightarrow$

$f(x)$ ist konvex für $x > -\frac{1}{2}$ und konkav für $x < -\frac{1}{2}$.