Zahlen und metrische Räume

• **Natürliche Zahlen :** Die natürlichen Zahlen sind die grundlegendste Zahlenmenge, da man diese Menge für das einfache Zählen verwendet.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

• **Ganze Zahlen :** Aus vielerlei Gründen (z.B. Temperaturmessung, Kontostand) ist es sinnvoll, auch Zahlen einzuführen, die negativ bzw. Null sind.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

• **Rationale Zahlen :** Zwischen den einzelnen ganzen Zahlen existieren auch noch Werte. Daher führt man die Bruchzahlen oder rationalen Zahlen ein, die sich durch Division zweier ganzer Zahlen ergeben (der Divisor darf dabei nicht Null sein).

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \ , \ b \neq 0\}$

• **Reelle Zahlen :** Die rationalen Zahlen (Verhältnisse zwischen ganzen Zahlen) sind nun ebenfalls nicht ausreichend. Man denke etwa an die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat, welche keine rationale Zahl sein kann.

Mathematisch ergibt sich die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch "Vervollständigung" der rationalen Zahlen.

• **Komplexe Zahlen :** $\mathbb{R}$ kann nun ebenfalls geeignet erweitert werden. Eine Motivation dafür ist etwa die Tatsache, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ **keine** Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt.

Man führt als sogenannte imaginäre Einheit das Symbol i ein, welches die Eigenschaft $i^2 = -1$ besitzt.

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist dann die Menge aller "Zahlen" der Form $z = a + ib$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Folgende Operationen können dann definiert werden.

$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

$$\tfrac{1}{c+id}=\tfrac{c}{c^2+d^2}-i\tfrac{d}{c^2+d^2}\quad \text{für}\quad c^2+d^2\neq 0$$

$$\tfrac{a+ib}{c+id}=(a+ib)\cdot\tfrac{1}{c+id}=\tfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\tfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Bemerkung. Offenbar gilt : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ können in bekannter Weise auf einer Geraden, der sogenannten **Zahlengeraden** anschaulich dargestellt werden.

$\mathbb{C}$ kann mittels der "komplexen Zahlenebene" veranschaulicht werden.

Bemerkung. Innerhalb von $\mathbb{N}$ können zwei Zahlen unbeschränkt addiert und multipliziert werden, i.a. aber nicht subtrahiert und auch nicht dividiert werden.

Innerhalb von $\mathbb{Z}$ können zwei Zahlen unbeschränkt addiert, subtrahiert und multipliziert werden, i.a. aber nicht dividiert.

Innerhalb von $\mathbb{Q}$ können zwei Zahlen unbeschränkt addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert (Divisor $\neq 0$) werden. Man spricht vom **Körper** der rationalen Zahlen.

Die Menge der reellen Zahlen bildet ebenfalls einen Körper, d.h. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Divison sind in bekannter Weise erklärt.

$\mathbb{C}$ bildet auch einen Körper.

Dabei gelten die (von der Schule her) bekannten Rechenregeln (Kommutativgesetze, Assoziativgesetze, Distributivgesetz etc.) sowie die Schreibweisen

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0+x_1+\ldots+x_n \quad , \quad \prod_{k=0}^{n} x_k = x_0\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_n$$

Die Ordnungsstruktur der Zahlen.

$\mathbb{R}$ (und damit auch $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$) sind geordnete Mengen, d.h. je zwei Zahlen können "der Größe nach" verglichen werden. Mathematisch gesprochen : es existiert eine Ordnungsrelation $\leq$ ("kleiner gleich") auf $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ : \ a \leq b \ \text{ oder } \ b \leq a$$

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \ : \ a \leq a$$

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ : \ a \leq b \ \text{ und } \ b \leq a \ \Rightarrow \ a = b$$

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \ : \ a \leq b \ \text{ und } \ b \leq c \ \Rightarrow \ a \leq c$$

Mittels dieser Relation kann die weitere Relation $<$ ("echt kleiner") durch $a < b \ \Leftrightarrow \ a \leq b$ und $a \neq b$ definiert werden.

Wichtige Rechenregeln dabei sind

$$a \leq b \ \text{ und } \ c > 0 \ \Rightarrow \ ac \leq bc$$

$$a \leq b \ \text{ und } \ c < 0 \ \Rightarrow \ ac \geq bc$$

$$ab \geq 0 \ \Leftrightarrow \ (a \geq 0 \text{ und } b \geq 0) \quad \textbf{oder} \quad (a \leq 0 \text{ und } b \leq 0)$$

$$ab \leq 0 \ \Leftrightarrow \ (a \geq 0 \text{ und } b \leq 0) \quad \textbf{oder} \quad (a \leq 0 \text{ und } b \geq 0)$$

Mittels der Ordnungsstruktur können wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert werden, die sogenannten **Intervalle**.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} \qquad \text{(offenes Intervall)}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} \qquad \text{(abgeschlossenes Intervall)}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\} \qquad \text{(halboffenes Intervall)}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\} \qquad \text{(halboffenes Intervall)}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x\} \quad , \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\} \quad , \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq a\}$$

Definition. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**

(bzw. **nach unten beschränkt**) wenn eine Zahl K existiert sodass

$$x \leq K \quad \forall\, x \in X \qquad (\text{bzw. } K \leq x \quad \forall\, x \in X).$$

K heißt dann **obere Schranke** (bzw. **untere Schranke**).

$X \subseteq \mathbb{R}$ heißt **beschränkt** wenn X nach oben beschränkt ist **und** nach unten beschränkt ist.

Dies ist gleichbedeutend damit, dass eine Zahl $K > 0$ existiert mit

$$-K \leq x \leq K \quad \forall\, x \in X\ .$$

Man beachte : ist K eine obere Schranke von $X \subseteq \mathbb{R}$, dann auch jede größere Zahl $K_1 \geq K$ (Analoges gilt für untere Schranken).

$a \in X$ (!) heißt **größtes Element** (bzw. **kleinstes Element**) von $X \subseteq \mathbb{R}$ wenn $x \leq a \;\; \forall\, x \in X$ (bzw. $a \leq x \;\; \forall\, x \in X$).

Beispiel. Betrachte $X = (0,1)$. 2 ist obere Schranke, -3 ist untere Schranke. X hat kein größtes und auch kein kleinstes Element.

Definition. Existiert für eine nach oben beschränkte Menge (bzw. nach unten beschränkte Menge) X eine kleinste obere Schranke (bzw. größte untere Schranke) a , dann heißt a das **Supremum** (bzw. **Infimum**) von X .

$$a = \sup X \quad \text{bzw.} \quad a = \inf X$$

Bemerkung. Die Menge $X = \{q \in \mathbb{Q} \ : \ q^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{Q}$ ist nach oben beschränkt, besitzt aber in $\mathbb{Q}$ **kein** Supremum (wohl aber in $\mathbb{R}$, nämlich $\sqrt{2}$).

Bemerkung. Sei $a = \inf X$, $b = \sup X$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $x, y \in X$ sodass $a \leq x < a + \varepsilon$ und $b - \varepsilon < y \leq b$. (Beweis als Übung!)

Satz. $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen, hat folgende fundamentale Eigenschaft : jede nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum (und jede nach unten beschränkte Teilmenge hat ein Infimum).

Norm und Metrik in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

Die sogenannte "Norm" in $\mathbb{R}$ ist der **Absolutbetrag**.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Dies ist geometrisch der Abstand von x zum Ursprung. Folgende einfach zu beweisende Rechengesetze sind erfüllt :

$$|x| \geq 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ \ , \ \ |x| = \sqrt{x^2}$$

$$|xy| = |x||y| \ \ , \ \ |\tfrac{x}{y}| = \tfrac{|x|}{|y|} \ \ , \ \ x \leq |x| \ \ , \ \ -x \leq |x|$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \ldots \text{ Dreiecksungleichung}$$

$$|x| < a \ \Leftrightarrow \ -a < x < a \ \ , \ \text{wobei } \ a > 0$$

$$|x| > a \ \Leftrightarrow \ x > a \ \text{ oder } \ x < -a \ \ , \ \text{wobei } \ a > 0$$

Die Norm in $\mathbb{C}$ ist ebenfalls der Absolutbetrag.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{falls } \ z = a + ib$$

Dies ist geometrisch ebenfalls der Abstand von z zum Ursprung. Weiters gilt

$$|z| \geq 0 \ \ \forall\, z \in \mathbb{C}$$

$$|zw| = |z||w| \ \ , \ \ |\tfrac{z}{w}| = \tfrac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$$

$$|z+w| \leq |z| + |w| \quad \ldots \text{ Dreiecksungleichung}$$

Beispiel.

(in $\mathbb{R}$) $\ |x-2| \leq 4 \ \Leftrightarrow \ -4 \leq x-2 \leq 4 \ \Leftrightarrow \ -2 \leq x \leq 6$

(in $\mathbb{C}$) $\ |z-(1+i)| > 3$ ist das Äußere der Kreisscheibe (in der komplexen Zahlenebene) mit Mittelpunkt $1+i$ und Radius 3 .

Mittels der Norm (Absolutbetrag) kann in $\mathbb{R}$ (und allen Teilmengen von $\mathbb{R}$) ein Abstandsbegriff (**Metrik**) eingeführt werden.

Wir setzen $d(x,y) = |x-y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Dann sind offenbar folgende Eigenschaften erfüllt :

(M1) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ... Dreiecksungleichung

Beweis. (M1) und (M2) sind offensichtlich.

$d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$

Bemerkung. Durch $d(z,w) = |z-w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$ kann auch auf $\mathbb{C}$ ein Abstandsbegriff (Metrik) definiert werden, welcher die Eigenschaften (M1) - (M3) erfüllt.

(Siehe genauer LV Lineare Algebra) Ein $\mathbb{K}$-**Vektorraum** V ist eine Menge (deren Elemente Vektoren genannt werden), wo je zwei "Vektoren" addiert (und auch subtrahiert) werden können und jeder "Vektor" mit einem Skalar aus dem Körper $\mathbb{K}$ (in der Regel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) multipliziert werden kann. Dabei müssen natürlich gewisse Eigenschaften erfüllt sein.

Eine **Norm** auf V ist dann eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit

(N1) $\|v\| \geq 0 \quad \forall\, v \in V$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ... Nullvektor

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall\, v \in V$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$

(N2) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall\, v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Wir erwähnen, dass $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum (bezüglich der üblichen Operationen). In beiden Fällen erfüllt die Betragsfunktion die Normeigenschaften, ist also eine Norm.

Beispiel. $\mathbb{R}^n = \{v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$, die Menge aller n-Tupel von reellen Zahlen, ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mittels

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist durch

$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ gegeben, wobei $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ist weiters X irgendeine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, welche die Eigenschaften

(M1) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ... Dreiecksungleichung

erfüllt, dann heißt d eine **Metrik** auf X und das Paar (X, d) heißt **metrischer Raum**.

Wir sahen vorher, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ also auch metrische Räume sind.

Bemerkung. Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$, dann erhalten wir durch

$d(v, w) = \|v - w\|$ eine Metrik auf V .

Insbesondere ist damit der $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum mit der Metrik

$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, wobei

$v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Ist (X, d) ein beliebiger metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$, dann heißt

$$K(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ d(x_0, x) < \varepsilon\}$$

die **offene ε-Kugel** um x_0 mit Radius ε.

($B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ d(x_0, x) \le \varepsilon\}$ heißt die **abgeschlossene ε-Kugel** um x_0 mit Radius ε)

In $\mathbb{R}$ ist damit eine offene ε-Kugel um $x_0 \in \mathbb{R}$ nichts anderes als ein offenes Intervall um x_0 mit Radius ε .

In $\mathbb{C}$ ist eine offene ε-Kugel um $z_0 \in \mathbb{C}$ nichts anderes als eine offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius ε .

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $G \subseteq X$ heißt **offene Menge**, wenn zu jedem $x \in G$ ein zugehöriges $\varepsilon_x > 0$ existiert mit $x \in K(x, \varepsilon_x) \subseteq G$. Die leere Menge $\emptyset$ ist per definition eine offene Menge.

In $\mathbb{R}$ ist also eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}$ genau dann offen, wenn mit jedem $x \in G$ zugleich ein geeignetes offenes Intervall um x ganz in G liegt.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossene Menge**, wenn $X \setminus A$ eine offene Menge ist, i.e. zu jedem $x \notin A$ gibt es ein zugehöriges $\varepsilon_x > 0$ sodass $K(x, \varepsilon_x) \cap A = \emptyset$.

Beispiele. Sei $X = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ und jedes offene Intervall (a, b) ist eine offene Menge.

Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist eine abgeschlossene Menge.

Ein halboffenes Intervall $[a, b)$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Aufgabe. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeige :

(a) Der endliche (!) Durchschnitt von offenen Mengen ist wieder eine offene Menge, die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist wieder eine offene Menge.

(a) Die endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist wieder eine abgeschlossene Menge, der beliebige Durchschnitt von abgeschlossenen

Mengen ist wieder eine abgeschlossene Menge.

Eine sehr wichtige Klasse von Teilmengen in der Analysis wird von den kompakten Teilmengen gebildet.

In allgemeinen metrischen Räumen (X,d) heißt eine Teilmenge $C \subseteq X$ **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von C eine endliche Überdeckung enthält, d.h.

ist $\{G_i \ : \ i \in I\}$ eine Familie offener Mengen mit $C \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$, dann existieren **endlich** viele Indizes $i_1,\dots,i_k$ mit $C \subseteq G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k}$.

Für die Räume $\mathbb{R}^n$ gibt es allerdings die folgende wichtige Aussage.

Satz. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **kompakt** genau dann wenn C (norm)beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele. Ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ ist kompakt. $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt (weil nicht beschränkt). Ein offenes Intervall (a,b) ist nicht kompakt (weil nicht abgeschlossen).

Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen.

1) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche der Ungleichung $\frac{x^2-3x+2}{x-5} \geq 0$ genügen.

Die Ungleichung ist für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 5$ erklärt.

Fall 1 : $x-5>0$, i.e. $x>5$

Bei Multiplikation mit $x-5$ ändert sich das Ungleichheitszeichen nicht.

Damit $x^2-3x+2=(x-1)(x-2) \geq 0 \ \Rightarrow$

$(x-1 \geq 0$ und $x-2 \geq 0)$ **oder** $(x-1 \leq 0$ und $x-2 \leq 0) \ \Rightarrow$

$x \geq 2$ oder $x \leq 1$.

Damit erhalten wir als erste Teillösung $\mathbb{L}_1 = (5, \infty)$.

Fall 2 : $x - 5 < 0$, i.e. $x < 5$

Bei Multiplikation mit $x - 5$ ändert sich nun das Ungleichheitszeichen.

Damit $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow$

$(x - 1 \geq 0 \text{ und } x - 2 \leq 0)$ **oder** $(x - 1 \leq 0 \text{ und } x - 2 \geq 0) \Rightarrow$

$1 \leq x \leq 2$.

Damit erhalten wir als zweite Teillösung $\mathbb{L}_2 = [1, 2]$.

Die Gesamtlösung ist dann $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [1, 2] \cup (5, \infty)$.

2) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche der Ungleichung

$|x - 1| + |x + 2| \leq 4$ genügen.

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x - 1 \geq 0 \text{ , i.e. } x \geq 1 \\ -(x - 1) & \text{falls } x - 1 < 0 \text{ , i.e. } x < 1 \end{cases}$$

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{falls } x + 2 \geq 0 \text{ , i.e. } x \geq -2 \\ -(x + 2) & \text{falls } x + 2 < 0 \text{ , i.e. } x < -2 \end{cases}$$

Somit müssen wir 3 Fälle unterscheiden.

Fall 1 : $x < -2$

$-(x - 1) - (x + 2) \leq 4$ bzw. $-2x \leq 5$ bzw. $x \geq -\frac{5}{2}$

Damit ist die erste Teillösung $\mathbb{L}_1 = \{x \ : \ -\frac{5}{2} \leq x < -2\}$.

Fall 2 : $-2 \leq x < 1$

$-(x - 1) + (x + 2) \leq 4$ bzw. $3 \leq 4$ ... ist richtig $\forall\, x$

Damit ist die zweite Teillösung $\mathbb{L}_2 = \{x \ : -2 \leq x < 1\}$.

Fall 3 : $x \geq 1$

$(x - 1) + (x + 2) \leq 4$ bzw. $2x \leq 3$ bzw. $x \leq \frac{3}{2}$

Damit ist die dritte Teillösung $\mathbb{L}_3 = \{x \ : \ 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\}$.

Die Gesamtlösung ist folglich $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{x \ : \ -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$.