

# Potenzreihen

Potenzreihen sind Funktionenreihen mit einer besonderen Gestalt.

**Definition.** Ist  $(a_k)$  eine Folge reeller (bzw. komplexer) Zahlen und  $x_0 \in \mathbb{R}$  (bzw.  $z_0 \in \mathbb{C}$ ), dann heißt die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  (bzw.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ ) eine **Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt**  $x_0$  (bzw.  $z_0$ ).

(Im folgenden verwenden wir die reelle Notation. Die Ergebnisse gelten aber auch sinngemäß im Komplexen. Statt Konvergenzintervalle treten dort dann Konvergenzkreisscheiben auf.)

Sei nun  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe.

Es ist evident, dass die Potenzreihe an der Stelle  $x = x_0$  konvergiert.

Nun betrachten wir die Folge  $(\sqrt[k]{|a_k|})$ .

- Ist  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty$ , dann hat  $(\sqrt[k]{|a_k|})$  eine unbeschränkte Teilfolge und für jedes feste  $x \neq x_0$  hat die Folge  $(\sqrt[k]{|a_k|}|x - x_0|)$  ebenfalls eine unbeschränkte Teilfolge, und somit kann die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  nach dem Wurzelkriterium **nicht** konvergent sein. Wir setzen in diesem Fall  $R = 0$ .

- Ist  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$  und  $x \neq x_0$ , dann gilt  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{2|x - x_0|}$  bzw.  $\sqrt[k]{|a_k|}|x - x_0| \leq \frac{1}{2}$  für fast alle  $k$ . Nach dem Wurzelkriterium folgt damit die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ . Wir setzen in diesem Fall  $R = \infty$ .

- Nun sei  $0 < \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \infty$ . Wir setzen  $\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ .

Für ein festes  $x$  mit  $|x - x_0| < R$  gilt dann  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{|x - x_0|}$ .

Wähle nun ein  $\xi \in \mathbb{R}$  mit  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \xi < \frac{1}{|x-x_0|}$ . Dann gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \xi \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[k]{|a_k|}|x-x_0| \leq \xi|x-x_0| = q < 1 \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Wurzelkriterium liegt damit die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  vor.

Ist  $|x-x_0| > R$ , dann ist  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > \frac{1}{|x-x_0|}$  und  $\sqrt[k]{|a_k|} \geq \frac{1}{|x-x_0|}$  bzw.  $\sqrt[k]{|a_k|}|x-x_0| \geq 1$  für unendlich viele  $k$ .

Nach dem Wurzelkriterium liegt somit Divergenz vor.

**Zusammenfassung.** Setzen wir  $\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ , dann gilt für die

Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ :

- absolute Konvergenz, falls  $|x-x_0| < R$
- Divergenz, falls  $|x-x_0| > R$
- falls  $|x-x_0| = R$ , dann ist vorderhand keine Aussage möglich.

Dieser Fall muß gesondert untersucht werden.

Falls  $R = 0$ , dann konvergiert die Reihe nur in  $x = x_0$ . Falls  $R = \infty$ , dann konvergiert die Reihe für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definition.**

$R$  heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ .

**Bemerkungen.**

(i) Im allgemeinen ist also der Konvergenzbereich einer reellen Potenzreihe ein Intervall um den Entwicklungspunkt  $x_0$ .

Für komplexe Potenzreihen wird entsprechend der Konvergenzbereich im allgemeinen eine Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt  $z_0$  sein.

(ii) Ist die Folge  $(\sqrt[k]{|a_k|})$  konvergent, dann gilt offenbar

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} .$$

(iii) Durch analoge Überlegungen (mittels des Quotientenkriteriums) kann gezeigt werden :

Ist die Folge  $\left( \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)$  konvergent, dann gilt

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| .$$

### Beispiele.

1) Betrachte  $\sum_{k=1}^{\infty} k^k (x-2)^k$  .

Wegen  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty$  ist  $R = 0$  .

2) Betrachte  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} (x+1)^k$  .

Wegen  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 3 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 3$  ist  $R = \frac{1}{3}$  . Die Potenzreihe konvergiert also (absolut) für alle  $x$  mit  $|x+1| < \frac{1}{3}$  , i.e. für alle  $x$  mit  $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$  .

3) Betrachte  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  .

$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0$  . Also ist  $R = \infty$  .

Wie zuvor erwähnt, konvergieren Potenzreihen in symmetrischen Intervallen (bzw. Kreisscheiben) um einen Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  (bzw.  $z_0 \in \mathbb{C}$ ) . Im Hinblick auf gliedweise Integration bzw. Differentiation von Potenzreihen ist die Frage von Interesse, auf welchen Teilmengen der Konvergenzmenge gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

**Satz.** Eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  mit Konvergenzradius  $R$ ,  $0 < R \leq \infty$  konvergiert auf jeder **kompakten** Teilmenge der Konvergenzmenge gleichmäßig.

**Beweis.**

Zu jeder kompakten Menge  $X \subseteq U_R(x_0) = \{x : |x - x_0| < R\}$  gibt es ein  $r$  mit  $0 < r < R$  mit  $X \subseteq U_r(x_0) \subseteq U_R(x_0)$ . Dann ist aber die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$  gemäß früher absolut konvergent und wegen der auf  $X$  gültigen Abschätzung  $|a_k(x - x_0)^k| \leq |a_k| r^k$  nach dem Weierstrass Kriterium auf  $X$  gleichmäßig konvergent.  $\square$

**Satz.** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ ,  $0 < R \leq \infty$ . Dann gilt für die von der Reihe erzeugte Funktion  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ :

1)  $A(x)$  ist stetig auf  $U_R(x_0)$ ,

2)  $A(x)$  ist auf  $U_R(x_0)$  beliebig oft differenzierbar, und es gilt dort für die  $n$ -te Ableitung

$$A^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1) \cdots (k-n+1)(x-x_0)^{k-n} = n! \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k (x-x_0)^{k-n}$$

wobei diese Potenzreihe ebenfalls den Konvergenzradius  $R$  besitzt,

3)  $A(x)$  ist auf jedem Intervall  $[a, b] \subseteq U_R(x_0)$  Riemann-integrierbar und die Potenzreihe darf gliedweise integriert werden, i.e.

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k \int_a^b (x - x_0)^k dx \right).$$

Eine weitere wichtige Aussage ist durch folgendes Ergebnis gegeben.

**Satz.** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ ,  $0 < R \leq \infty$ , und bezeichne  $A(x)$  die Summenfunktion.

Dann gilt für alle  $n \geq 0$ , dass  $a_n = \frac{A^{(n)}(x_0)}{n!}$ , d.h. es ist

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k .$$

**Beweis.**  $A^{(n)}(x) = n! \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k (x - x_0)^{k-n}$ . Für  $x = x_0$  folgt dann  $A^{(n)}(x_0) = n! a_n$ .  $\square$

### Bemerkungen.

(i)  $A(x)$  ist auf  $U_R(x_0)$  bereits durch die Werte auf einer beliebig kleinen Umgebung von  $x_0$  vollständig bestimmt.

(ii) Potenzreihen erscheinen formal als Polynome "unendlich hohen Grades". Bei Polynomen wissen wir, dass zwei Polynome vom Grad  $n$  identisch sind, wenn sie an mindestens  $n + 1$  Stellen übereinstimmen. Für zwei Potenzreihen ist es allerdings nicht ausreichend, dass sie nur an unendlich vielen Punkten übereinstimmen, wie das Beispiel der beiden Funktionen  $f(x) = \sin(\pi x)$  und  $g(x) \equiv 0$  zeigt, die an allen ganzzahligen  $x$  übereinstimmen, aber nicht identisch sind.

### Satz. (Identitätssatz für Potenzreihen)

Besitzen  $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  und  $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$  an unendlich vielen von  $x_0$  verschiedenen Stellen  $x_1, x_2, \dots$ , die sich an  $x_0$  häufen, denselben Wert, i.e.  $A(x_i) = B(x_i)$ , dann gilt  $a_k = b_k \quad \forall k$ , d.h.  $A(x) = B(x)$  auf  $X = U_{R_1}(x_0) \cap U_{R_2}(x_0)$ .

**Bemerkung.** Dieser Identitätssatz wird in der Funktionentheorie verallgemeinert und ist dort ein mächtiges Werkzeug zum Beweis vieler Sätze (z.B. die Eindeutigkeit der Fortsetzung von holomorphen Funktionen).