# Satz von Taylor, Taylor-Reihen

Die Kenntnis von $f'$ liefert gewisse Rückschlüsse auf die Funktion $f$ selbst, z.B. Monotonie, mögliche lokale Extrema.

Die Kenntnis von $f''$ liefert darüberhinaus eine Information, ob dieses Wachsen bzw. Fallen von $f'$ zunimmt oder abnimmt.

Dies führt zur Überlegung, ob bei Kenntnis aller Ableitungen an einer Stelle $x_0$ die Funktion global oder zumindest auf einem Intervall rekonstruierbar ist.

**Beispiel.** Betrachte das Polynom $f(x) = x^3 - x^2 - 5$ . $f$ kann etwa auch in der Form

$$f(x) = (x-1)^3 + 2(x-1)^2 + (x-1) - 5 = \sum_{k=0}^{3} a_k (x - x_0)^k$$

mit $x_0 = 1$ und $a_0 = -5$ , $a_1 = 1$ , $a_2 = 2$ , $a_3 = 1$ geschrieben werden.

Wir beobachten dabei, dass $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

Betrachte nun ein beliebiges Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ . Unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes erhalten wir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k [(x - x_0) + x_0]^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left\{ \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (x - x_0)^m x_0^{k-m} \right\} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} a_k x_0^{k-m} \binom{k}{m} (x - x_0)^k = \sum_{m=0}^{n} \left\{ \sum_{k=m}^{n} a_k x_0^{k-m} \binom{k}{m} \right\} (x - x_0)^m =$$

$$\sum_{m=0}^{n} b_m (x - x_0)^m \quad \text{mit} \quad b_m = \sum_{k=m}^{n} a_k x_0^{k-m} \binom{k}{m} \ .$$

Für $x = x_0$ folgt : $f(x_0) = b_0$ bzw. $b_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}$ .

$k$-faches Differenzieren von $f(x)$ liefert

$f^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^{n} b_m m(m-1)..(m-k+1)(x-x_0)^{m-k}$ .

Für $x = x_0$ folgt dann $f^{(k)}(x_0) = b_k k!$ bzw. $b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

Damit gilt : $f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$ .

In anderen Worten : $f(x)$ läßt sich durch Kenntnis von

$f(x_0)$ , $f'(x_0)$ , … , $f^{(n)}(x_0)$ ,

also aller Ableitungen an **einer** Stelle $x_0$ darstellen.

**Satz.** (**Taylor**)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar auf $I$ und $x_0 \in I$ . Dann gilt

1) $\forall\, x \in I$ ist $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x,x_0)$ .

2) Für $R_n(x,x_0)$ gilt nach Lagrange $R_n(x,x_0) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

wobei $x_0 < \xi < x$ bzw. $x < \xi < x_0$ oder in Standardschreibweise

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{n+1}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \ , \ 0 < \vartheta < 1 \ .$$

**Bemerkung.**

i) $T_n(x,x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt **Taylorpolynom** ($n$-ter Ordnung)

ii) $R_n(x,x_0) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ heißt **Restglied nach Lagrange**

**Beweis.**

ObdA sei $x > x_0$ , $x$ ... fest. Betrachte die Hilfsfunktion

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit $t \in [x_0, x]$ wobei $m = m(x, x_0)$ so gewählt wird, dass $g(x_0) = 0$ .

Nachdem auch $g(x) = 0$ ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt, daher $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ mit $g'(\xi) = 0$ .

$g'(\xi) = 0 - f'(\xi) - f''(\xi)(x-\xi) + f'(\xi) - \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + f''(\xi)(x-\xi) -$

$- \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + m\frac{(x-\xi)^n}{n!} =$

$- \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + m\frac{(x-\xi)^n}{n!} = 0$ .

Daraus folgt $m = f^{(n+1)}(\xi)$ . Setzen wir nun in $g(t)$ für $t = x_0$ , so erhalten wir die Taylor-Formel. $\square$

**Bemerkung.** Approximieren wir $f(x)$ durch das Taylorpolynom 1. Ordnung, dann erhalten wir

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

wobei $\xi$ ein Punkt zwischen $x_0$ und $x$ ist.

Finden wir im betrachteten Bereich eine Schranke $M$ für $|f''|$ , dann wird die Güte der Approximation durch

$$|f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))| \leq \frac{M}{2}|x - x_0|^2$$

gegeben.

**Bemerkung.** Wenn $f$ beliebig oft differenzierbar ist, dann gilt die Taylor-Formel für jedes $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist das Taylor-Polynom

$T_n(x, x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ für jedes feste $x \in I$ die $n$-te Teilsumme der unendlichen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ .

Dies ist die sogenannte zugeordnete **Taylor-Reihe** von $f$ bzgl. des **Entwicklungspunktes** $x_0$ .

Da der Satz von Taylor nichts über die Konvergenz dieser Reihe aussagt, stellt sich die Frage, an welchen Stellen $x \in I$ die Reihe konvergiert und unter welchen Bedingungen die Summe der Reihe gleich $f(x)$ ist (d.h. die Taylor-Reihe die Funktion darstellt) .

Aus der Taylor-Formel und der Defintion der Konvergenz unendlicher Reihen folgt sofort

**Satz.** Sei $f$ beliebig oft differenzierbar auf $I$ .

Dann gilt $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$ ist.

**Bemerkung.** Falls $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = a \neq 0$ , dann konvergiert zwar die Taylor-Reihe, aber nicht gegen $f(x)$ .

**Beispiel.** Betrachte $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ .

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f^{(k)}(0) = 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}$ , also ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \equiv 0$ , d.h. die Taylor-Reihe stellt $f$ nur an der Stelle $x = 0$ dar.

Gibt es auf dem Bereich $[x_0, x]$ bzw. $[x, x_0]$ allerdings eine gemeinsame Schranke für alle Ableitungen, dann wird $f(x)$ durch die Taylor-Reihe dargestellt.

**Satz.** Sei $f$ beliebig oft differenzierbar auf $I$ . Wenn eine Konstante $K > 0$ (unabhängig von $k$) existiert mit $\max\limits_{[x_0,x]} |f^{(k)}(\xi)| \leq K$ (bzw. $\max\limits_{[x,x_0]} |f^{(k)}(\xi)| \leq K$) , dann stellt die Taylor-Reihe die Funktion $f$ an der Stelle $x$ dar.

**Beweis.**

$|R_n(x,x_0)| = |\frac{f^{n+1}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}| \leq K \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ für $n \to \infty$ .

Wir bestimmen nun die Taylor-Reihen der elementaren Funktionen.

**Satz.** $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ .

**Beweis.** $f(x) = e^x$ ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ , und es gilt $f^{(k)}(x) = e^x$ für alle $k \in \mathbb{N}$ . Damit ist $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$ $\forall\, k \geq 0$ . Mit $x_0 = 0$ ist $T_n(x, x_0) = T_n(x, 0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ .

Für beliebiges und festes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\max\limits_{[0,x]} |f^{(k)}(\xi)| = \max\limits_{[0,x]} e^{\xi} = e^x$ bzw. $\max\limits_{[x,0]} |f^{(k)}(\xi)| = \max\limits_{[x,0]} e^{\xi} = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ .

Damit wird die Funktion $e^x$ in jedem $x \in \mathbb{R}$ durch ihre Taylor-Reihe dargestellt, i.e. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ . $\square$

**Satz.** $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ für alle $x \in (-1, 1]$ .

**Beweis.** $f(x) = \ln(1+x)$ ist beliebig oft differenzierbar auf $(-1, \infty)$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k+1}}{(1+x)^k} \quad \Rightarrow \quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k} .$$

Mit $f(0) = 0$ gilt dann für $x \in (-1, \infty)$ : $T_n(x, 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ .

Man kann zeigen, dass die Funktion durch ihre Taylor-Reihe auch dargestellt wird. $\square$

Betreffend der Taylor-Reihe für die Potenzfunktion $(1+x)^{\alpha}$ erwähnen wir zuerst, dass man zeigen kann, dass $\lim\limits_{k \to \infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1, 1)$ gilt, wobei

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} .$$

**Satz.** $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ , $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ und $x \in (-1,1)$ .

**Beweis.** Die Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ ist auf $(-1,\infty)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt dort für alle $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1 \ , \ \tfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \tbinom{\alpha}{k}$$

Somit ist für alle $x \in (-1,\infty)$ : $T_n(x,0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$ .

Man kann zeigen, dass die Funktion durch ihre Taylor-Reihe auch dargestellt wird. $\square$

**Satz.** $\cosh x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sinh x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ .

**Beweis.** (für $\cosh x$)

$f(x) = \cosh x$ ist auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und für alle $k \geq 0$ gilt $f^{(2k)}(x) = \cosh x$ , $f^{(2k+1)}(x) = \sinh x$ .

Somit ist für alle $x \in \mathbb{R}$ $T_n(x,0) = \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ .

Auf $I = [0,x]$ bzw. $I = [x,0]$ gelten die Abschätzungen

$$f^{(2k)}(\xi) = \cosh \xi \ \Rightarrow \ \max_{\xi \in I} \left| f^{(2k)}(\xi) \right| = \cosh x \ ,$$

$$f^{(2k+1)}(\xi) = \sinh \xi \ \Rightarrow \ \max_{\xi \in I} \left| f^{(2k+1)}(\xi) \right| = |\sinh x| \ .$$

Somit stellt die Taylor-Reihe die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ dar. $\square$

**Satz.** $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ .

**Beweis.** (für $\cos x$)

$f(x) = \cos x$ ist auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und für alle $k \geq 0$ gilt $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ , $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \sin x$ .

Somit ist $T_n(x,0) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ .

Wegen $|\cos x| \leq 1$ und $|\sin x| \leq 1$ , mithin $\max_{\xi\in\mathbb{R}} \left|f^{(2k)}(\xi)\right| \leq 1$ und $\max_{\xi\in\mathbb{R}} \left|f^{(2k+1)}(\xi)\right| \leq 1$ , stellt die Taylor-Reihe die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ dar. $\square$