Richtungsgrenzwerte, partielle Ableitungen

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Wir untersuchen das Verhalten von f entlang einer Geraden durch einen Punkt x^0,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x = x^0 + h\vec{a} \ , \ \|\vec{a}\| = 1 \ , \ h \in \mathbb{R}\} \ .$$

In diesem Fall hängt dann f lediglich vom Geradenparameter h ab. Man beachte, dass in obiger Darstellung die Geradenrichtung durch einen **Einheitsvektor** angegeben wird.

- Falls existent, heißt $b = \lim\limits_{h \to 0} f(x^0 + h\vec{a})$ der **Grenzwert von** f **an** x^0 **in Richtung** $\vec{a}$.
- f heißt **stetig in** x^0 **in Richtung** $\vec{a}$, wenn
  $$\lim_{h \to 0} f(x^0 + h\vec{a}) = f(x^0) \ .$$

Beispiel. Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{und} \quad x^0 = (0,0) \ .$$

Für $\vec{a} = (a_1, a_2)$ gilt $f(x^0 + h\vec{a}) = \frac{a_1 a_2 h}{a_1^2 + h^2 a_2^4} \to 0$ für $h \to 0$. (Betrachte dabei die Fälle $a_1 = 0$ und $a_1 \neq 0$)

Somit ist f stetig in jeder Richtung $\vec{a}$.

Betrachten wir nun die Folge $(x_n, y_n) \to (0,0)$ mit $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$, dann erhalten wir

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \ \text{ für } \ n \to \infty.$$

Dies bedeutet aber, dass f in x^0 unstetig ist.

Nun interessiert uns die **Änderungsrate** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an einer Stelle x^0 in Richtung $\vec{a}$ (mit $\|\vec{a}\| = 1$).

Definition. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt an einem (inneren) Punkt $x^0 \in D(f)$ **differenzierbar in Richtung** $\vec{a}$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)}{h}$$

existiert.

Er heißt **Richtungsableitung** von f an x^0 in Richtung $\vec{a}$.

Schreibweise: $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0)$.

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bietet sich hierzu eine geometrische Deutung an : der Graph von f ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$. Das Bild der Geraden durch x^0 in Richtung $\vec{a}$ ist dann eine Kurve auf dieser Fläche. Die Richtungsableitung von f an x^0 in Richtung $\vec{a}$ beschreibt dann die Steigung der Tangente an diese Kurve im Punkt $(x^0, f(x^0))$.

Bemerkung. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an x^0 in Richtung $\vec{a}$ differenzierbar, dann auch in Richtung $-\vec{a}$ und es gilt

$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{a})}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0)$.

Bemerkung. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an x^0 in Richtung $\vec{a}$ differenzierbar, dann ist f auch stetig in Richtung $\vec{a}$.

Beweis.
$\lim\limits_{h \to 0} \left(f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0) \right) = \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{f(x^0+h\vec{a}) - f(x^0)}{h} h \right) = \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) \cdot 0 = 0$. $\square$

Dass aus der Richtungsdifferenzierbarkeit i.a. nicht die Stetigkeit folgt, zeigt wiederum das vorherige Beispiel

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{und} \quad x^0 = (0, 0) \ .$$

Für $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ist $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) = \begin{cases} \frac{a_2^2}{a_1} & \text{falls } a_1 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } a_1 = 0 \end{cases}$.

Somit existieren zwar alle Richtungsableitungen, aber f ist in $x^0 = (0, 0)$ nicht stetig.

Durch die kanonischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ des $\mathbb{R}^n$ sind gewisse Richtungen ausgezeichnet.

Definition. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt an einem (inneren) Punkt $x^0 \in D(f)$ **partiell differenzierbar** (nach der k-ten Variablen), wenn die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(x^0)$ existiert.

Wir verwenden dabei die Schreibweisen $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ bzw. $f_{x_k}(x^0)$.

Wegen $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x^0+h\vec{e}_k)-f(x^0)}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_k^0+h,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_k^0,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0)}{h}$

bildet man die partielle Ableitung nach x_k so, indem alle Variablen bis auf x_k als konstant betrachtet werden und die gewöhnliche Ableitung nach x_k gebildet wird.

Beispiel.
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^2y - z^3$, und sei $x^0 = (1,1,0)$.

Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0) = 2xy\big|_{(1,1,0)} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0) = x^2\big|_{(1,1,0)} = 1$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x^0) = -3z^2\big|_{(1,1,0)} = 0$.

Satz. (ohne Beweis)

Existieren für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x^0 die partiellen Ableitungen $f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n}$, und sind diese dort beschränkt, dann ist f stetig an x^0 .

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und es mögen alle partiellen Ableitungen an $x^0 \in D(f)$ existieren. Dann können wir diese als Komponenten eines Vektors auffassen.

Definition.

$$\mathrm{grad} f(x^0) = \mathrm{grad} f\big|_{x^0} = (f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n})\big|_{x^0}$$

heißt der **Gradient** von f an x^0 .

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{xy}$.

Dann ist $f_x = ye^{xy}$ und $f_y = xe^{xy}$, also $\mathrm{grad} f = (ye^{xy}, xe^{xy})$.

Im besonderen ist $\mathrm{grad} f|_{(1,2)} = (2e^2, e^2)$.