Extremwerte von Funktionen mehrerer reeller Variabler

Bei der Bestimmung der Extrema von (differenzierbaren) Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist es sinnvoll, zuerst jene Stellen zu bestimmen, an denen überhaupt ein Extremum auftreten kann.

Im eindimensionalen Fall, also bei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, war ja die entsprechende Bedingung die, dass $f'(x_0) = 0$.

Satz. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung $U(x^0)$ von $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Hat f an x^0 ein relatives (= lokales) Extremum, dann gilt notwendigerweise $\mathrm{grad} f(x^0) = \vec{0}$.

Beweis. f muß an x^0 in jeder Richtung $\vec{a}$ als Funktion des Geradenparameters ein relatives Extremum besitzen. Wegen des entsprechenden Kriteriums für Funktionen einer reellen Variablen bedeutet dies, dass an x^0 die entsprechende Richtungsableitung $\mathrm{grad} f(x^0) \cdot \vec{a}$ verschwindet. Weil $\vec{a}$ beliebig ist, muss damit $\mathrm{grad} f(x^0) = \vec{0}$ sein. $\square$

Bemerkung. Mit der Bedingung $\mathrm{grad} f(x) = \vec{0}$ erhält man also jene Stellen, die für ein lokales Extremum in Frage kommen.

Zur Gewinnung eines hinreichenden Kriteriums für das Vorliegen eines Extremums nehmen wir an, dass f zweimal stetig differenzierbar ist. Dann kann die (symmetrische) Matrix $H(x)$ der zweiten partiellen Ableitungen gebildet werden, die sog. **Hesse-Matrix** oder **zweite Ableitung** von f .

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x)$$

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{xy}$.

Dann ist $f_x = ye^{xy}$, $f_y = xe^{xy}$ und weiters

$f_{xx} = y^2e^{xy}$, $f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} + xye^{xy}$ und $f_{yy} = x^2e^{xy}$.

Somit ist $H(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} & e^{xy} + xye^{xy} \\ e^{xy} + xye^{xy} & x^2e^{xy} \end{pmatrix}$

Indem f (lokal) durch das Taylor-Polynom zweiten Grades approximiert wird, stellt sich heraus, dass für das Vorliegen eines Extremums die durch die Hesse-Matrix definierte quadratische Form von wesentlicher Bedeutung ist.

Definition. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann heißt die Abbildung $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $Q(x) = x^TAx$ eine **quadratische Form**.

Eine quadratische Form $Q(x) = x^TAx$ heißt nun

- **positiv definit**, wenn $Q(x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0$
- **negativ definit**, wenn $Q(x) < 0 \quad \forall\, x \neq 0$
- **positiv semidefinit**, wenn $Q(x) \geq 0 \quad \forall\, x$
- **negativ semidefinit**, wenn $Q(x) \leq 0 \quad \forall\, x$
- **indefinit**, wenn sowohl positive als auch negative Werte angenommen werden.

Bemerkung. Die obigen Bedingungen können auch durch die Eigenwerte von A ausgedrückt werden.

- $Q > 0 \;\Leftrightarrow\;$ alle Eigenwerte sind > 0
- $Q < 0 \;\Leftrightarrow\;$ alle Eigenwerte sind < 0
- $Q \geq 0 \;\Leftrightarrow\;$ alle Eigenwerte sind ≥ 0
- $Q \leq 0 \;\Leftrightarrow\;$ alle Eigenwerte sind ≤ 0
- Q ist indefinit $\;\Leftrightarrow\;$ es gibt positive als auch negative Eigenwerte.

Bemerkung. Der Spezialfall $n = 2$ läßt sich einfach beschreiben.

Eine 2×2 Matrix A ist

- positiv definit $\Leftrightarrow$ $\det A > 0$ und $a_{11} > 0$
- negativ definit $\Leftrightarrow$ $\det A > 0$ und $a_{11} < 0$
- semidefinit $\Leftrightarrow$ $\det A \geq 0$
- indefinit $\Leftrightarrow$ $\det A < 0$.

Satz. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(U(x^0))$ auf einer offenen Umgebung von x^0 . Weiters sei $\mathrm{grad} f(x^0) = \vec{0}$. Dann gilt :

- $H(x^0)$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$ f hat an x^0 ein isoliertes relatives Minimum
- $H(x^0)$ ist negativ definit $\Leftrightarrow$ f hat an x^0 ein isoliertes relatives Maximum
- $H(x^0)$ ist indefinit $\Leftrightarrow$ f hat an x^0 kein relatives Extremum. (**Sattelpunkt**)

Beispiel.
Man bestimme die relativen Extrema von $f(x, y) = x^2 + 4y + \frac{1}{y}$.

Die Kandidaten für ein mögliches Extremum ergeben sich aus der Bedingung $\mathrm{grad} f(x) = \vec{0}$, hier also aus $f_x = 2x = 0$ und $f_y = 4 - \frac{1}{y^2} = 0$ bzw. $x = 0$ und $y = \pm\frac{1}{2}$.

Somit sind die Punkte $P_1(0, \frac{1}{2})$ und $P_2(0, -\frac{1}{2})$ mögliche Extrema.

$f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = \frac{2}{y^3}$,

also ist $H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$ und $\det H(x, y) = \frac{4}{y^3}$.

Mit $\det H(x, y)|_{P_1} = 32 > 0$ und $f_{xx}|_{P_1} = 2 > 0$ folgt, dass in P_1 ein relatives Minimum vorliegt.

Wegen $\det H(x, y)|_{P_2} = -32 < 0$ liegt in P_2 ein Sattelpunkt vor.

Häufig sucht man die Extremwerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unter eingeschränkten Bedingungen für die Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$.

Beispiel. Man bestimme die Extrema von $f(x,y) = \cos^2 x - 2\sin^2 y$, wobei $y - x = \frac{\pi}{2}$.

Die entscheidende Aussage in dieser Fragestellung ist der folgende

Satz. (**Lagrange'sche Multiplikatorregel**)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf einer offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Weiters seien $g_1, g_2, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf X , und linear unabhängig.

Hat unter diesen Voraussetzungen f an x^0 ein Extremum, wobei nur jene $x \in X$ betrachtet werden, für die $g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$ ist, dann gibt es Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ sodass

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_\nu}(x^0) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, ..., n \ .$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ heißen **Lagrange'sche Parameter** bzw. auch **Lagrange'sche Multiplikatoren** .

Die Funktionen $g_1, g_2, \ldots, g_m$ beschreiben dabei die m **Nebenbedingungen**.

Zur praktischen Berechnung.

Gegeben seien also $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und des weiteren die m Nebenbedingungen $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, ..., g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Man bilde die Funktion

$F(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, ..., x_n) + \lambda_2 g_2(x_1, ..., x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, ..., x_n)$

mit den $n + m$ Unbekannten $x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m$.

Die mögliche Extremalstelle x^0 ergibt sich dann aus dem System der $n + m$ Gleichungen

$$g_l(x^0) = 0 \quad \text{für} \quad l = 1, 2, ..., m$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_\nu}(x^0) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, ..., n \ ,$$

also aus den Gleichungen

$$F_{\lambda_1} = 0 \ , \ ... \ , \ F_{\lambda_m} = 0 \quad \text{sowie} \quad F_{x_1} = 0 \ , \ ... \ , \ F_{x_m} = 0 \ .$$

Beispiel. Ein Kegelvolumen $V(r, H) = \frac{r^2 \pi H}{3}$ soll unter der Nebenbedingung $g(r, H) = r^2 + H^2 - 2RH = 0$ (R ... fest) maximal werden.

Wir betrachten $F(r, H, \lambda) = V + \lambda g = \frac{r^2 \pi H}{3} + \lambda(r^2 + H^2 - 2RH)$.

Damit erhalten wir die Gleichungen

$$F_\lambda = r^2 + H^2 - 2RH = 0$$

$$F_r = \frac{2\pi}{3} rH + \lambda 2r = 0$$

$$F_H = \frac{\pi}{3} r^2 + \lambda(2H - 2R) = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda = -\frac{\pi}{3} H$, eingesetzt in die dritte Gleichung erhalten wir $r^2 = 2H(H - R)$.

Unter Berücksichtigung der ersten Gleichung erhalten wir nun $H = \frac{4}{3} R$ und $r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$.