# Stammfunktionen und Integrationsmethoden

Sei $I$ ein Intervall , $f$ $R$-integrierbar für jedes $[a,b] \subseteq I$ , und $x_0 \in I$ .

Dann heißt die Funktion $F$ mit

$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ **Integral von** $f$ als Funktion der oberen Grenze (bzw. kurz Integralfunktion) .

**Bemerkung.** $F$ ist stetig auf $I$ .

**Beweis.** Sei $x \in I$ . Wähle $[a,b]$ mit $x \in [a,b] \subseteq I$ . Auf $[a,b]$ gelte $|f(x)| \leq M$ . Sei nun $(x_n)$ eine Folge aus $[a,b]$ mit $x_n \to x$ . Dann gilt

$$|F(x_n) - F(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_n} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \right| = \left| \int\limits_{x}^{x_n} f(t)dt \right| \leq \left| \int\limits_{x}^{x_n} |f(t)|dt \right| \leq$$

$\leq M|x_n - x|$ . Daraus folgt $F(x_n) \to F(x)$ . $\square$

**Satz.** (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$f$ stetig an $x \in I \;\Rightarrow\; F$ differenzierbar in $x$ und $F'(x) = f(x)$ .

**Beweis.** Sei $(x_n)$ eine Folge aus $I$ mit $x_n \neq x$ , $x_n \to x$ . Sei weiters $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der Stetigkeit von $f$ an $x$ folgt :

$\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ mit $|t - x| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(t) - f(x)| < \varepsilon$ .

Weiters $\exists\, N_\varepsilon$ mit $|x_n - x| < \delta_\varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$ .

Für $n > N_\varepsilon$ gilt dann

$$\left| \tfrac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} - f(x) \right| = \left| \tfrac{1}{x_n - x} \left\{ \int\limits_{x_0}^{x_n} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \right\} - f(x) \right| =$$

$$= \left| \tfrac{1}{x_n - x} \int\limits_{x}^{x_n} f(t)dt - f(x) \right| = \tfrac{1}{|x_n - x|} \left| \int\limits_{x}^{x_n} (f(t) - f(x))dt \right| \leq$$

$$\left|\frac{1}{|x_n-x|}\int\limits_x^{x_n}|f(t)-f(x)|dt\right| \leq \frac{1}{|x_n-x|}\varepsilon|x_n-x| = \varepsilon \ .$$

Dies bedeutet aber $\left|\frac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x} - f(x)\right| \to 0$ . $\square$

**Definition.** Die Funktionen $f$ und $F$ seien auf dem Intervall $I$ definiert, $F$ sei dort differenzierbar und es gelte $F'(x) = f(x)$ .

Dann heißt $F$ **Stammfunktion** von $f$ auf $I$ .

**Bemerkung.** Jede auf $I$ stetige Funktion besitzt dort eine Stammfunktion, nämlich $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ .

Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$ auf $I$ , dann gilt für $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ , dass $\varphi'(x) = 0$ auf $I$.

Dann ist aber $\varphi = C$ .. const., also $F_1(x) = F_2(x) + C$ . Somit unterscheiden sich zwei Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante.

**Bemerkung.** Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ wird auch als **unbestimmtes Integral** bezeichnet und man schreibt dafür

$$\int f(x)dx + C \quad , \ C \in \mathbb{R}$$

**Satz.** (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f$ stetig auf $[a, b]$ und $F$ eine Stammfunktion von $f$ auf $[a, b]$ . Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \ .$$

**Beweis.** $F_1(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ist ebenfalls eine Stammfunktion, daher existiert eine Konstante $C$ mit $F_1(x) = F(x) + C$ .

Mit $x = a$ erhalten wir $0 = F_1(a) = F(a) + C$ .

Mit $x = b$ erhalten wir $F_1(b) = \int\limits_a^b f(t)dt = F(b) + C$ .

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert die Behauptung. $\square$

**Bemerkung.** Die obige Aussage gilt auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass $f$ lediglich $R$-integrierbar auf $[a, b]$ ist.

**Anmerkungen.**

(i) Oft schreibt man $\int\limits_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ .

(ii) Ist $f$ $R$-integrierbar auf $[a, b]$, dann folgt daraus **nicht** notwendigerweise, dass $f$ eine Stammfunktion auf $[a, b]$ besitzt.

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } -1 \le x \le 0 \\ 1 & \text{wenn } 0 < x \le 1 \end{cases}$ keine Stammfunktion auf $[-1, 1]$ .

(iii) Hat $f$ auf $[a, b]$ eine Stammfunktion, dann ist $f$ **nicht** notwendigerweise $R$-integrierbar.

**Beispiele.**

1) $\int\limits_a^b e^t dt \; : \; f(x) = e^x \, , \; F(x) = e^x \; \Rightarrow \; \int\limits_a^b e^t dt = e^b - e^a$

2) $\int\limits_0^b \sqrt{t} dt \; : \; f(x) = \sqrt{x} \, , \; F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} \; \Rightarrow \; \int\limits_0^b \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} b^{3/2}$

3) $\int\limits_1^2 \frac{1}{t} dt \; : \; f(x) = \frac{1}{x} \, , \; F(x) = \ln x \; \Rightarrow \; \int\limits_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln x|_1^2 = \ln 2$

Differenziation und Integration sind also in gewisser Weise zueinander inverse Operationen. Ist eine Funktion $F(x)$ gegeben und setzen wir $f(x) = F'(x)$ dann ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und es gilt

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

**Beispiel.** $F(x) = \arctan x \ \Rightarrow\ F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , also

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \ \Rightarrow\ F'(x) = \cos 2x \ \Rightarrow\ \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$F(x) = \ln|x+1| \ \Rightarrow\ F'(x) = \frac{1}{x+1} \ \Rightarrow\ \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C$$

Aus den Differenziationsregeln können nun in weiterer Folge Regeln für die Bestimmung von Stammfunktionen hergeleitet werden.

Die Produktregel besagt dass $(fg)' = f'g + fg'$ . Ist nun $G(x)$ eine Stammfunktion von $f'g$ dann gilt

$$(fg - G)' = (fg)' - G' = f'g + fg' - f'g = fg' \ .$$

Also ist $fg - G$ eine Stammfunktion von $fg'$ und damit

$$\int fg' dx = fg - \int f'g dx \quad \ldots \textbf{ Partielle Integration}$$

**Beispiele.**

(i) $I = \int xe^x dx$ .

Setze $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$ . Dann ist $f'(x) = 1$ und $g(x) = e^x$ .

Folglich ist $I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$ .

(ii) $I = \int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx$ .

$f(x) = \ln x \ , \ g'(x) = 1 \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{x} \ , \ g(x) = x$

Folglich ist $I = \int \ln x dx = x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x + C$ .

Aus der Kettenregel (für differenzierbare Funktionen) kann das Verfahren der **Lösung mittels Substitution** hergeleitet werden.

$$(F(g(x))' = F'(g(x))g'(x) \ \Rightarrow\ F(g(x)) = \int F'(g(x))g'(x)dx + C$$

Die Substitutionsregel wird in der Praxis wie folgt angewendet.

**Beispiel.** $I = \int \sin 2x dx$

Wir setzen $z = g(x) = 2x$ . Dann ist $z' = g'(x) = 2$ bzw. $\frac{dz}{dx} = 2$ und weiters $dz = 2dx$ bzw. $dx = \frac{1}{2}dz$ .

Damit kann das Integral vereinfacht werden zu

$$I = \int \frac{1}{2} \sin z dz = -\frac{1}{2} \cos z + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + C \ .$$

Der letzte Schritt ist die sogenannte Rücksubstitution.

**Beispiel.** $\int \frac{\sin(3 \ln x)}{x} dx$

Substitution: $z = 3 \ln x \ \Rightarrow \ \frac{dz}{dx} = \frac{3}{x}$ bzw. $\frac{1}{3}dz = \frac{dx}{x}$

Damit $\int \frac{\sin(3 \ln x)}{x} dx = \int \frac{1}{3} \sin z dz = -\frac{1}{3} \cos z + C = -\frac{1}{3} \cos(3 \ln x) + C$

**Bemerkung.** Viele wichtige Substitutionen können in der Formelsammlung gefunden werden.

**Bemerkung.** Wegen $(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ gilt offenbar

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \ , \text{ also etwa } \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2 + 1) + C \ .$$

**Bemerkung.** Ist der Integrand eine rationale Funktion dann kann zur Bestimmung des Integrals die Partialbruchzerlegung verwendet werden.

**Beispiel.** $I = \int \frac{x^4+x^3+2x-2}{x^3-x^2+x-1} dx$

$$(x^4 + x^3 + 2x - 2) : (x^3 - x^2 + x - 1) = x + 2 + \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}$$

$$\frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+D}{x^2+1} \ \Rightarrow \ A = 1 \ , \ B = 0 \ , \ D = 1$$

Damit $I = \int (x + 2 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}) dx =$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x - 1| + \arctan x + C$$