Differenzial- und Integralrechnung
Musterbeispiele

1. Man bestimme den Grenzwert der Folge (a_n) , wobei $a_n = \frac{2+4+6+...+2n}{n^2+n+1}$.

2. Gegeben ist die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$.

   Zeigen Sie, dass die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Bestimmen Sie dann den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. Man untersuche, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ konvergiert.

4. Durch Untersuchung des Monotonieverhaltens der Funktion $f(x) = x - \ln(1+x)$ zeige man, dass $\ln(1+x) \leq x$ für $0 \leq x < \infty$ gilt.

   Bestimmen Sie damit eine konvergente Majorante zur Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\sqrt{k}}$

5. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(k+2)}{(k+3)^2} x^k$.

   Des weiteren untersuche man, ob die Reihe im rechten Randpunkt des Konvergenzintervalls konvergiert.

6. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(4n+5)5^n}} x^n$ und untersuche, ob die Reihe im linken Randpunkt des Konvergenzintervalls konvergiert.

7. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{n+1}} x^n$.

8. Für welche Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ?

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{falls } x \leq 1 \\ ax - x^3 & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ bx^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

9. Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion. Man zeige, dass dann f einen Fixpunkt haben muß, d.h. $\exists\ \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

   (Hinweis: man betrachte $g(x) = f(x) - x$ und denke an den Nullstellensatz.)

10. Man berechne $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$.

11. Man berechne $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

12. Man berechne $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

13. Man berechne (a) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1})$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[x]{1+\sinh x}$

14. Man bestimme das Taylor-Polynom 2. Ordnung von der Funktion $f(x) = \ln(1+x^2)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

15. Man bestimme das Taylor-Polynom 2. Ordnung der Funktion $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4}\cos x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

16. Man bestimme das Taylor Polynom 3. Ordnung von $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln(1+e^x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

17. Gegeben sei das Gleichungssystem $f_1(x,y,z) = z^2 - 2y - xz = 0$ und $f_2(x,y,z) = yz + x^2 = 0$. Für den Punkt $P(1,1,-1)$ gilt offenbar $f_1|_P = 0$ und $f_2|_P = 0$.

    Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem in einer Umgebung von P nach x und y "auflösbar" ist, d.h. es existieren zwei Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$, sodass

    $f_1(\varphi(z),\psi(z),z) \equiv 0$ und $f_2(\varphi(z),\psi(z),z) \equiv 0$.

    ($\varphi(z)$ und $\psi(z)$ sind dabei **nicht** explizit zu bestimmen)

18. Man löse mittels partieller Integration das Integral $I = \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

19. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $z(x,y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$ im Bereich $x > 0$, $y > 0$.

20. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = (x-y)^3 + (x+y)^3 - 6x$.

    Untersuchen Sie, ob in den Punkten $P_1(1,0)$ und $P_2(0,-1)$ ein Extremum vorliegen kann und ob es gegebenfalls ein Minimum oder Maximum ist.