

Differenzial- und Integralrechnung
Übungsblatt 1
WS 11/12

1. Logische Schlüsse und Mengen:

(a) Sind folgende logische Schlüsse richtig?

- Alle Lebewesen sind sterblich. *und* Alle Menschen sind Lebewesen. \Rightarrow Alle Menschen sind sterblich.
- Kein Huhn kann schwimmen. *und* Einige Menschen sind Schwimmer. \Rightarrow Alle Menschen sind keine Hühner.
- Ich bin reich oder ich bin glücklich. *und* Ich bin nicht reich. \Rightarrow Ich bin glücklich.

(b) Finden Sie den Fehler in folgender Rechnung:

$$\begin{array}{l} 1 = x \qquad \qquad \qquad | \cdot x \\ x = x^2 \qquad \qquad \qquad | - 1 \\ x - 1 = x^2 - 1 \\ x - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad | / (x - 1) \\ \frac{x-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ 1 = x + 1 \qquad \qquad \qquad x = 1 \\ 1 = 2 \end{array}$$

(c) Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, \dots, 15\}$, $B = \{0, 1\}$ und $C = \{2, 7, 18\}$

- Gilt $\{5\} \in A$ oder $5 \in A$?
- Gilt $B \subseteq A$?
- Bestimmen Sie $A \cap C$, $A \cup C$ und $A \setminus C$.

(d) Fritz ist Physiker, wohnt in Graz und liest gerne. Beschreiben Sie ihn möglichst genau durch einen Ausdruck $p \in D$, wobei D aus G (wohnt in Graz), L (liest gerne) und C (ist Chemiker) zusammengesetzt wird.

2. Komplexe Zahlen:

(a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = -1 + 2i$ und $z_2 = 3 - i$. Berechnen Sie $\operatorname{Re} z_1$, $\operatorname{Im} z_1$, $|z_1|$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ und $z_1 \cdot z_2$.

(b) Zeigen Sie folgende Gleichung:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2}$$

(c) Beweisen Sie folgende Rechenregeln:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad |z| = \sqrt{z \overline{z}}$$

(d) Bestimmen Sie jene $z \in \mathbb{C}$, die beide Ungleichungen

$$1 \leq z \overline{z} \leq 4 \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im} z| < \operatorname{Re} z$$

erfüllen.

3. Elementare Differenzial- und Integralrechnung:

(a) Gegeben sei eine Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{6t}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}tx$$

für $x \in \mathbb{R}$ und einen Parameter $t \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie die Nullstellen, Extrema (hier ist jeweils auch anzugeben, ob es sich um eine Hoch- oder Tiefpunkt handelt) sowie die Wendepunkte der Funktion und fertigen Sie für $t = 3$ eine Skizze an.

(b) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$I_1 = \int_{-1}^1 -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 dx, I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx, I_3 = \int_0^2 \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3} dx$$

4. Vereinfachen von Ausdrücken und Rechnen mit Beträgen:

(a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich und überlegen Sie sich jeweils, welche Einschränkungen für die Variable $x \in \mathbb{R}$ gelten.

- $\frac{x}{x^2 - 4a^2} + \frac{2a}{x^2 - 4a^2}, a \in \mathbb{R}$
- $(7x^3 + 13x^2 + 4x)e^{-\ln x}$
- $\frac{|x^8 - 16x^4|}{x^4|x^2 - 4|}$
- $\frac{e^{2x} - 1}{1 - e^x}$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Ungleichung erfüllen:

$$x^2 - 6x + 5 < 0$$

5. Ordnungsrelationen, Metrik:

(a) Welche der folgenden Relationen sind Ordnungsrelationen?

- die Relation „hat größere x-Koordinate als“ auf den Punkten der Ebene;
- die Relation „ $(a_1 + b_1i) \sim (a_2 + b_2i)$ genau dann wenn $a_1 < a_2$ oder $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ “ auf den komplexen Zahlen.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ eine Metrik auf \mathbb{R}^2 ist.