Differenzial- und Integralrechnung

Übungsblatt 3

WS 11/12

---

1. **Vollständige Induktion:** Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:
   (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $n^2 + 5n + 1$ ungerade
   (b) Für alle $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt $n + 1 < 2^n$
   (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{n!}$
2. **Grenzwerte von reellen Folgen:** Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   (a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} - 1$
   (b) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$
   (c) $a_n = \frac{n^4+2n+7}{n^4-n^2+1}$
3. **Folgen:**
   (a) Überprüfen Sie die Folgen
   $$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \frac{(2n)^n}{7^n \cdot n!}$$
   auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls ihren Grenzwert.
   Hinweis: Beachten Sie $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$ bzw. benutzen Sie die Bernoulli-Ungleichung.
   (b) Babylonisches Wurzelziehen: Wir definieren eine Folge (a_n) auf rekursive Weise:
   $$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$$
   und eine Folge (b_n) mittels $b_n = a_n^2$.
   - Bestimmen Sie die ersten Glieder der Folge (a_n).
   - Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   - Zeigen Sie die Ungleichung $b_n \geq 2$ für $n \geq 2$.
   - Zeigen Sie induktiv $b_n \leq 2 + \frac{1}{2^n}$ für $n \geq 2$.
   - Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent? (Begründung!) Wenn ja, welche Grenzwerte besitzen Sie?
4. **Monotoniekriterium:**
   (a) Gegeben ist eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit
   $$a_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$$
   i. Zeigen Sie, dass die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist.

ii. Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

iii. Bestimmen Sie ferner eine - möglichst kleine - natürliche Zahl N, so dass gilt: $|a_n - a| < 0,0025$ für alle $n > N$.

(b) Untersuchen Sie die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}x_n^2, \quad x_1 = 1$$

auf Konvergenz mittels Monotoniekriterium(Montonie + Beschränktheit) und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

5. **Beschränktheit und Monotonie:** Untersuchen Sie folgende Folgen auf Beschränktheit und Monotonie

   (a) $a_k = \sin k, \qquad a_k = e^{-k}, \qquad a_k = 1 - \frac{1}{k}, \qquad a_k = k^2 - k$

   (b) $a_{n+1} = a_n^2 + a_n, \qquad a_1 = \frac{1}{4}$

   (c) $b_n = \frac{8n^2-5}{4n^2+7}$

   (d) $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4}x_n^2, \qquad x_1 = 1$

6. **Beweise:**

   (a) Sei $\{a_n\}$ eine Nullfolge und sei $\{b_n\}$ eine beschränkte Folge. Dann ist $\{a_n b_n\}$ Nullfolge.

   (b) Sei $\{z_n\}$ mit $z_n = x_n + iy_n$ eine Folge aus $\mathbb{C}$. Dann gilt:
   $\{z_n\}$ konvergent $\iff$ $\{x_n\}$ konvergent und $\{y_n\}$ konvergent, wobei $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ Folgen in $\mathbb{R}$.