

Differenzial- und Integralrechnung
Übungsblatt 4
WS 11/12

1. Unendliche Reihen:

(a) Sind folgende Reihen konvergent oder divergent?

$$\begin{array}{lll} \text{i. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k+1}{k^3+k} & \text{ii. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k} & \text{iii. } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\pi}{e}\right)^k \\ \text{iv. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^4} & \text{v. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{4k^2+3} & \text{vi. } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^k 7^{-\sqrt{k}} \\ \text{vii. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{3+k!} \end{array}$$

(b) Bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren

$$\text{i. } \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin^n x}{\sqrt{n}} \quad \text{ii. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n^2}$$

2. Grenzwerte und Stetigkeit:

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

(b) Beweisen Sie, dass:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$$

(c) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$$

i. Skizzieren Sie die Funktion.

ii. Finden Sie $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

iii. Finden Sie $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

iv. Finden Sie $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(d) Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = x^2$$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ im Intervall $0 < x < 1$ gleichmäßig stetig ist.

(e) Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = 1/x$$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ im Intervall $0 < x < 1$ nicht gleichmäßig stetig ist.